Matemáticas III

Tercer semestre

Matemáticas III

EDUCACIÓN

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Telebachillerato Comunitario

Telebachillerato Comunitario.
Tercer Semestre. Matemáticas III

Autor
Ricardo Antonio Salazar Puente

Asesoría académica
José Pedro Cortés Xiqui
Maritza Sosa Ameneyro
Vanessa Alejandra Valadez Gutiérrez

Asesoría técnico-pedagógica
Dirección de Coordinación Académica

Diseño y diagramación
María José Delgado Sandoval

Argentina 28, Centro, 06020, Ciudad de México.
ISBN: 978-607-8229-93-2
Séptima reimpresión
Impreso en México

Tabla de contenido

Matemáticas III

Tabla de contenido

Bloque IV. Utilizas distintas formas de la ecuación de una recta

Bloque V. Aplicas los elementos y las ecuaciones de una circunferencia

Bloque VI. Aplicas los elementos y las ecuaciones de una parábola

Bloque VII. Aplicas los elementos y las ecuaciones de una elipse

Prefacio

Estimado estudiante, el libro que tienes en tus manos fue elaborado pensando en ti, en tus necesidades e inquietudes, como un instrumento que te apoye ahora que estudias el bachillerato. En sus páginas encontrarás contenidos y actividades que son fundamentales para que paso a paso, puedas alcanzar las metas que esta asignatura te propone para este semestre.

A ti te toca, ahora, sacarle el mayor provecho a este libro, que es fruto del esfuerzo de un grupo de profesores y especialistas. Si lo haces tu amigo, lo aprovechas al máximo y lo combinas con el apoyo de tu maestro y de los demás recursos didácticos que están a tu alcance, seguramente ampliarás tus competencias y habilidades para construir un mejor futuro para ti, y coadyuvar al desarrollo de tu comunidad, de tu estado y de nuestro país.

Te deseamos éxito en esta importante etapa de tu formación, el bachillerato.

Presentación general

La asignatura Matemáticas III es parte de tu formación básica de bachillerato y pertenece al campo disciplinar de Matemáticas, que conforme al marco curricular común, tiene la finalidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y construcción de ideas. Esto conlleva al despliegue de distintas competencias para la resolución de problemas matemáticos que trasciendan el ámbito escolar.

Matemáticas III se ubica en el tercer semestre del plan de estudios del nivel educativo de bachillerato general que ha establecido la Secretaría de Educación Pública (SEP). Y tiene relación con las materias: Matemáticas I y II, Física I y II, Química I y II, Biología y Matemáticas IV.

Te invitamos a aprovechar al máximo este libro, el cual está integrado por una serie de contenidos y actividades de aprendizaje, a través de los cuales desarrollarás conocimientos, habilidades, actitudes y valores para crecer como persona y como ciudadano, capaz de resolver y comprender situaciones de la vida cotidiana a través del lenguaje científico y matemático, obteniendo así, las herramientas que te ayudarán a construir nuevos conocimientos y compartirlos con quienes te rodean.

Te invitamos a que encuentres en este libro una forma sencilla y agradable para identificar tus debilidades y fortalezas para potencializar tus habilidades matemáticas.

¿Qué es una competencia?

En el contexto educativo una competencia se define como "la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico" (Acuerdo 442, Secretaría de Educación Pública, 2008).

Las competencias genéricas que se desarrollarán en el presente texto, se enuncian a continuación.

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructivista congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

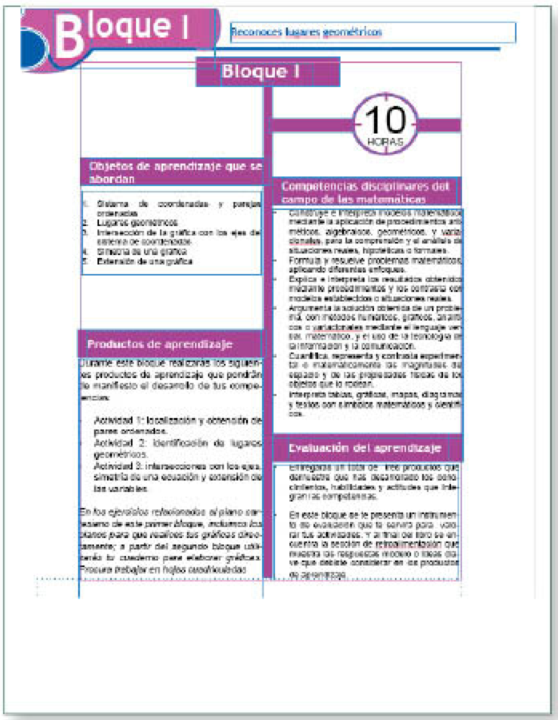
Inicio de cada bloque

Cada bloque comienza con un esquema en el que se muestran los objetos de aprendizaje, los productos y las competencias disciplinares que se abordarán.

Posteriormente se presenta una breve introducción en donde se indica de qué trata y cómo vas a trabajar.

Asimismo, se presenta el propósito del bloque, es decir, las metas y los desempeños que debes lograr.

Para identificar qué tanto sabes del tema y cuáles son las áreas por mejorar, se propone una evaluación diagnóstica, que además te permitirá conocer tu nivel en las competencias a desarrollar.




Bloque VI Aplicas los elementos y las ecuaciones de una parábola

Introducción

En el bloque anterior estudiamos las distintas formas de expresar la ecuación de una circunferencia, además conocimos las secciones cónicas, que son curvas que se obtienen de la intersección de un cono circular recto con un plano.

Ahora, en este bloque aprenderás a:
- Identificar los elementos asociados a la parábola.
- Reconocer la ecuación general y ordinaria de la parábola.
- Aplicar los elementos y ecuaciones de la parábola en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

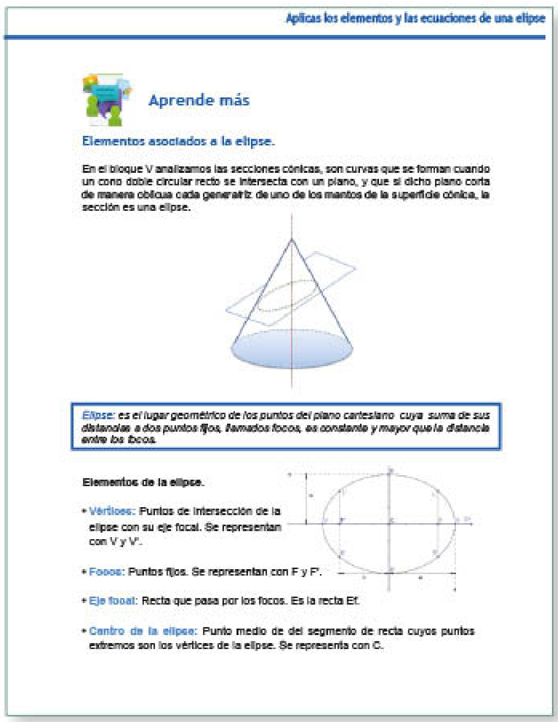
La parábola es un elemento geométrico de mucha importancia. Aparece en diversas ramas de las ciencias aplicadas debido a que su forma corresponde con las gráficas de las ecuaciones cuadráticas. Y esto ayuda a realizar los cálculos necesarios para diversas aplicaciones como por ejemplo:

En antenas de radar, pues la parábola permite concentrar los haces de señales en un receptor situado en el foco.

Desarrollo del bloque

Esta parte es fundamental, pues aquí encontrarás el contenido general y disciplinar que necesitas para acercarte al tema de las Matemáticas.

A lo largo del bloque se intercalan estrategias didácticas de aprendizaje, actividades acompañadas de imágenes, ejemplos, preguntas detonadoras y evaluaciones. Todo estará relacionado con los contenidos y las competencias a desarrollar. También encontrarás algunos apoyos de estudio como cápsulas con datos interesantes y cuadros al margen del texto para reforzar tu aprendizaje; por ejemplo:



Aplicas los elementos y las ecuaciones de una elipse

Aprende más

Elementos asociados a la elipse.

En el bloque V analizamos las secciones cónicas, son curvas que se forman cuando un cono doble circular recto se intersecta con un plano, y que si dicho plano corta de manera oblicua cada generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica, la sección es una elipse.

Elipse: es el lugar geométrico de los puntos del plano cartesiano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante y mayor que la distancia entre los focos.

Elementos de la elipse.

- Vértices: Puntos de intersección de la elipse con su eje focal. Se representan con V y V'.
- Focos: Puntos fijos. Se representan con F y F'.
- Eje focal: Recta que pasa por los focos. Es la recta Ef.
- Centro de la elipse: Punto medio de del segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Se representa con C.

1. **Glosario,** definiciones y términos para apoyar la comprensión.

2. **Modelos matemáticos**, que te permitirán representar problemas para llegar a la solución.

3. **Procedimientos**, que muestran la secuencia lógica para llegar a soluciones.

4. Imágenes, que te ayudarán a la mejor comprensión de los conceptos.

5. Figuras, que te permitirán realizar las actividades de aprendizaje.

6. Datos interesantes, que faciliten la relación de los contenidos con tu vida diaria.

Simbología que facilitará tu proceso de aprendizaje

Diseño Instruccional

Para iniciar, reflexiona

¿Con qué objetos de aprendizaje cuento?

Aprende más

Aplica lo aprendido

Actividad

Apoyos para reforzar el aprendizaje

Glosario

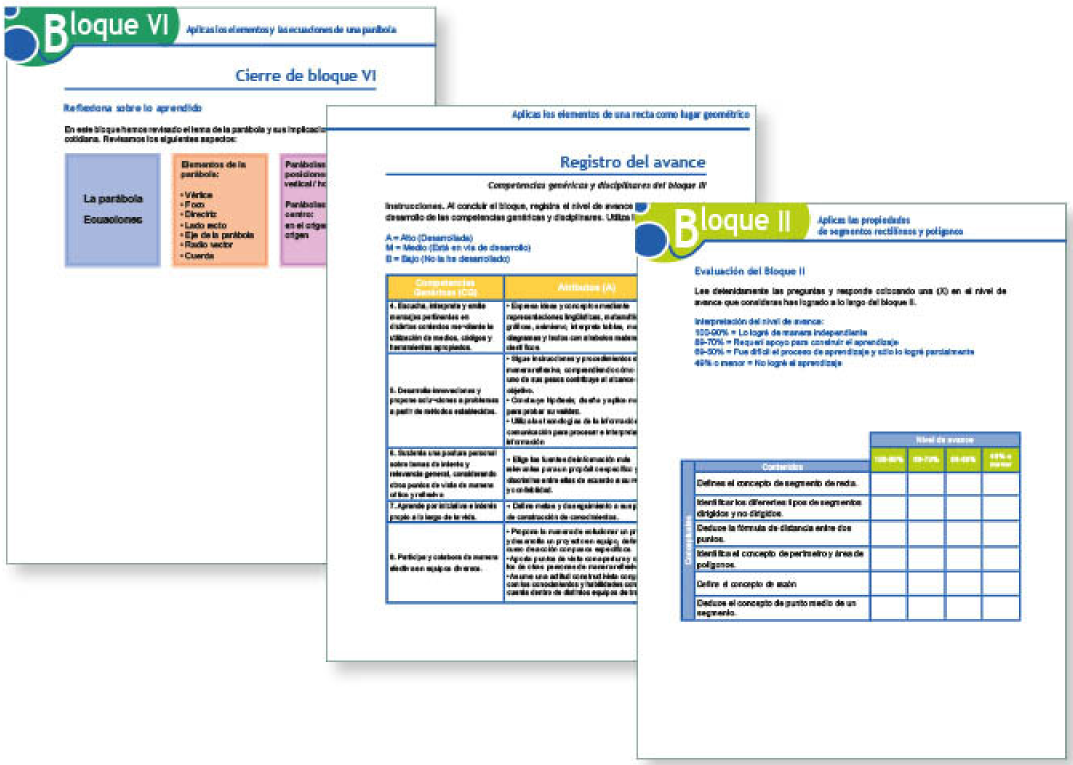
Reflexiones sobre la actividad

Sabías que...

Cierre de bloque

Al terminar cada tema se te pedirá una actividad y un producto final para que puedas evaluar qué tanto has avanzado y qué áreas de oportunidad tienes; así mismo se te pedirá analizar, investigar, reflexionar y argumentar acerca de los temas señalados.

El libro incluye actividades de aprendizaje para que evalúes tu desempeño en el logro de las competencias, por lo que al finalizar cada actividad puedes consultar la retroalimentación de la misma. Ten presente que cada actividad debe concretarse en una evidencia que irás recopilando en tu cuaderno y concentrando para la evaluación del curso.



Los contenidos y las actividades se presentan de una manera atractiva. Aprovecha cada pregunta, contenido, actividades, ya que cada una incidirá en tu crecimiento personal, familiar y social.

Trabaja con tu profesor y con tus compañeros; acércate a ellos, resuelvan dudas y aprendan juntos; date la oportunidad de construir con ellos este viaje. Esperamos que el curso te sea interesante y fructífero.

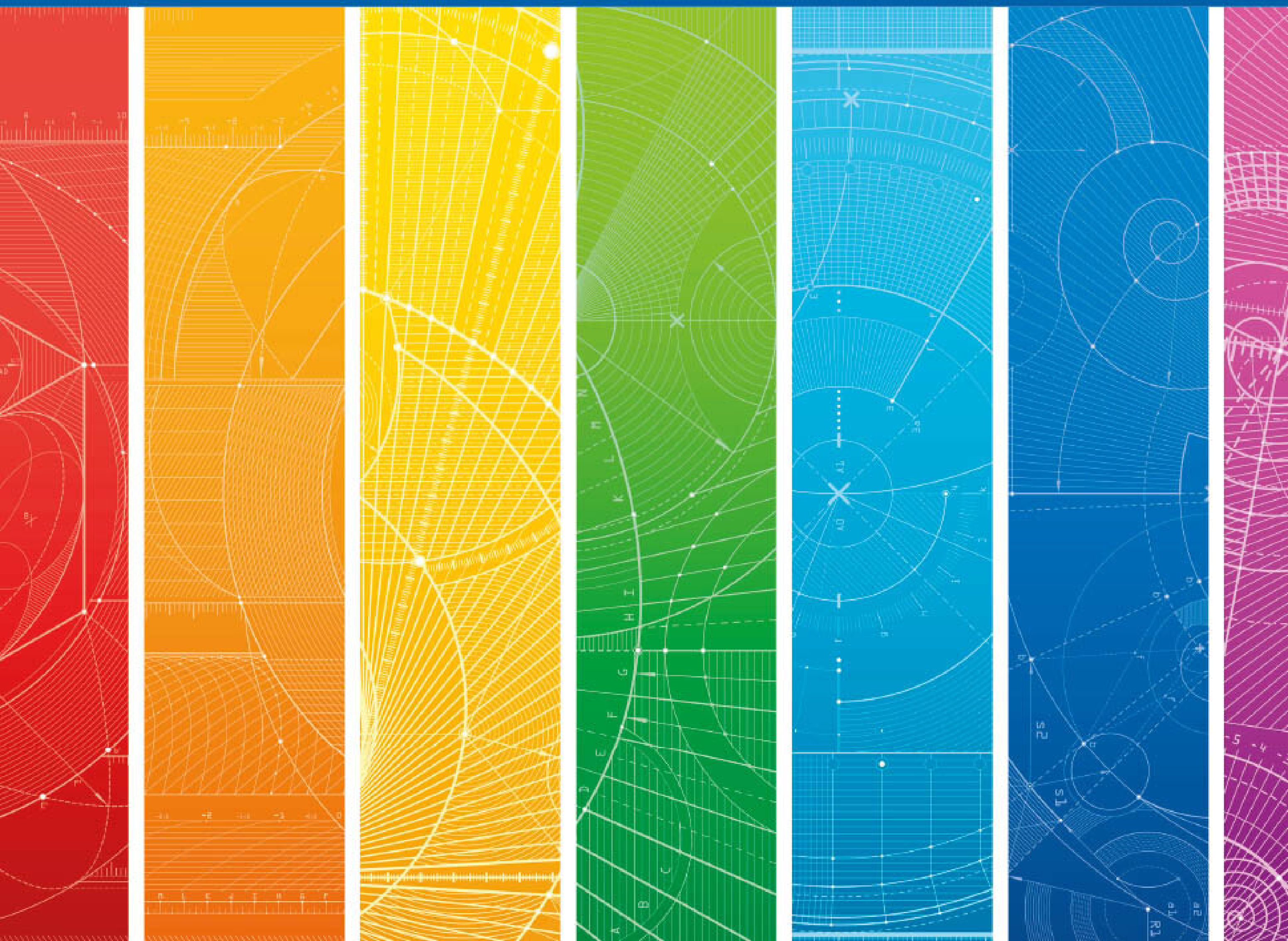
¿Cuál es el propósito de este libro?

El propósito fundamental de este libro es ser un instrumento autogestivo, es decir, para que aprendas de forma independiente a través de actividades que te permitan obtener conocimientos y desarrollar habilidades, actitudes y valores en el campo de las Matemáticas. Su estructura y diseño forman parte de una estrategia didáctica encaminada a que construyas por tí mismo tus conocimientos, desarrolles competencias y te apropies de aprendizajes significativos que produzcan en tu pensamiento cambios de organización continuos.

La asignatura Matemáticas III permite enlazar los objetos de estudio de dos ramas de la matemática, que son la base del componente de formación básica, el álgebra y la geometría, mediante la modelación algebraica de las relaciones y formas geométricas que has explorado desde otros puntos de vista, así como reconocer a partir de registros algebraicos formas geométricas como son rectas y circunferencias, con otras formas nuevas como parábola y elipse.

BLOQUE I

Reconoces lugares geométricos



Bloque I

10 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. Sistema de coordenadas y parejas ordenadas
2. Lugares geométricos
3. Intersección de la gráfica con los ejes del sistema de coordenadas
4. Simetría de una gráfica
5. Extensión de una gráfica

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: localización y obtención de pares ordenados.
- Actividad 2: identificación de lugares geométricos.
- Actividad 3: intersecciones con los ejes, simetría de una ecuación y extensión de las variables.

En los ejercicios relacionados al plano cartesiano de este primer bloque, incluimos los planos para que realices tus gráficas directamente; a partir del segundo bloque utilizarás tu cuaderno para elaborar gráficas. Procura trabajar en hojas cuadriculadas

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás un total de tres productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.
- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje.

Introducción

La palabra *geometría* es de origen griego, y proviene de las raíces *geo* (tierra) y *metron* (medir). Es una rama de las Matemáticas que estudia las propiedades y medidas de las figuras en el plano o en el espacio, e incluye puntos, rectas, curvas, planos, etcétera.

Algunas de las ramas de la geometría son geometría analítica, geometría descriptiva, geometría de espacios con cuatro o más dimensiones, geometría fractal y geometría euclidiana, que tiene sus orígenes en científicos griegos como Euclides (de ahí su nombre), Arquímedes y Apolonio de Perga.

En este curso conocerás la geometría analítica, donde estudiaremos las propiedades de la recta, la parábola, el círculo y la elipse.

En el siglo XVII, el filósofo y matemático francés René Descartes publicó la obra *La geometría*, donde introdujo el concepto de coordenadas rectangulares, ya que representó por medio de líneas rectas, una en forma horizontal y otra en forma vertical, un plano donde se podían realizar trazos.

Este sistema se denomina *sistema de coordenadas cartesianas*, en honor de su creador, y en éste es posible resolver una inmensa variedad de problemas geométricos en combinación con otros de índole algebraico.

En la actualidad, algunas ciudades del mundo organizan el sistema de tránsito vehicular de manera similar a la de un plano cartesiano, para facilitar el flujo de los automóviles.

En este primer bloque reconocerás las características matemáticas que definen un lugar geométrico, a partir del conocimiento del sistema de coordenadas rectangulares y las parejas ordenadas, por medio de definiciones, actividades, ejemplos y ejercicios, con lo cual entenderás necesidad de la geometría en la vida diaria.

¿Con qué propósito?

Reconoces las características matemáticas que definen un lugar geométrico a través de la identificación de las características de un sistema de coordenadas rectangulares, la interpretación de la información a partir de la noción de parejas ordenadas y el reconocimiento de relaciones entre variables que conforman las parejas ordenadas.

Para iniciar, reflexiona

Pedro está en el centro de la ciudad y necesita saber dónde se encuentra el estadio de fútbol. Al preguntar, una persona le responde que el estadio se encuentra al norte de la ciudad. Si se para en medio de la calle, ¿cómo se orientaría para saber hacia dónde dirigirse? Comenta tu respuesta de manera clara y sencilla.

____
____
____

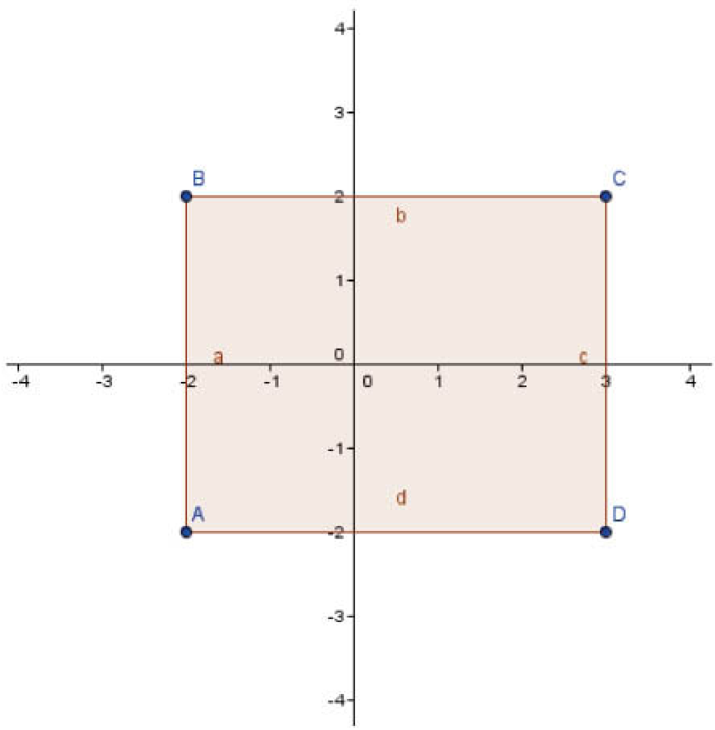
¿Con qué conocimientos cuento?

Para desarrollar nuevas competencias, es conveniente revisar lo aprendido en los primeros dos semestres.

Evaluación diagnóstica

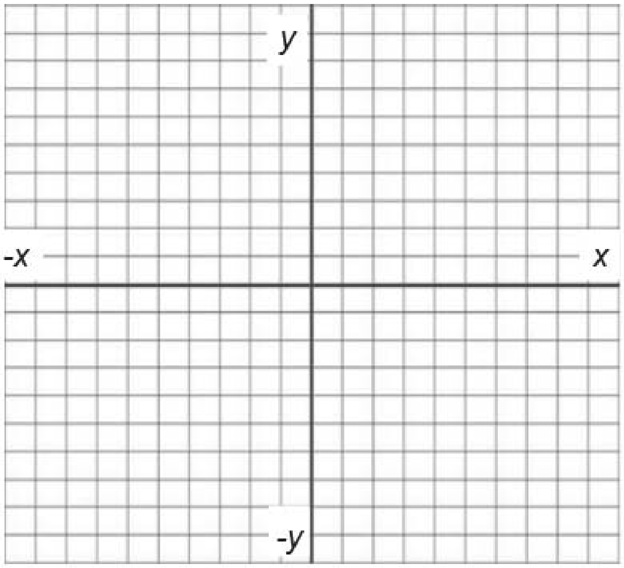
Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones y responde lo que se te pide.

1. Determina las coordenadas de los vértices del rectángulo de la siguiente figura.



A (,   )
B (,   )
C (,   )
D (,   )

2. Localiza en el siguiente sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos: A(3,0), B(-4,2), C(3,-5), D(0,-5), E(-2,-4), F(5,3), G(-2,0) y H(0,4)



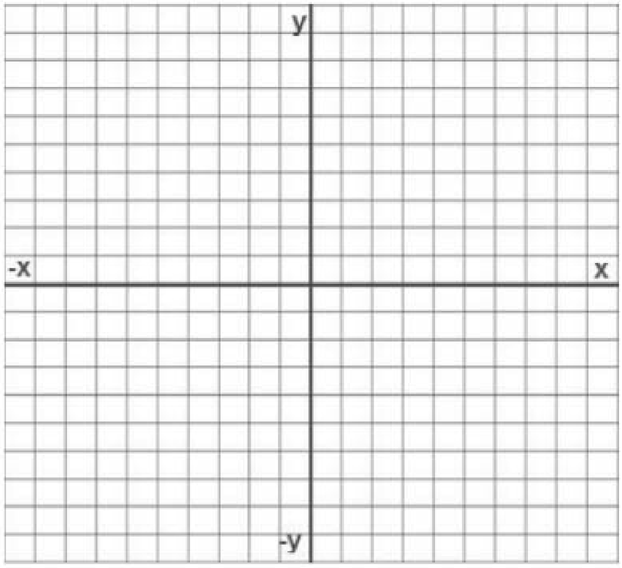
3. Encuentra la intersección con el eje x de la ecuación $y = 2x - 4$

4. Encuentra la intersección con el eje y de la ecuación $y = 3x + 2$

5. Explica brevemente la diferencia entre rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas.

____
____
____
____
____

6. Traza la gráfica de la ecuación $y = 2x + 3$



7. Despeja la variable x de la ecuación $2x^2 - 4y^2 = 16$

8. Despeja la variable y de la ecuación $2x^2 - 4y^2 = 16$

9. Si se tiene la ecuación $y = \sqrt{x - 2}$, ¿cuáles son los valores permitidos para x?

10. Si se tiene la ecuación $x = \sqrt{16 - 4y^2}$, ¿cuáles son los valores permitidos para y?

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 preguntas considera tu resultado como Bueno, de 5 a 7 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 5 considera tu desempeño como No suficiente, lo cual exige que refuerces tus conocimientos previos, repasando tus apuntes de Matemáticas I y II.

¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos desarrollando los siguientes conceptos: pares ordenados, intersección con los ejes, tipos de pares de rectas, despeje de variables, que se presentan en este bloque.

Aprende más

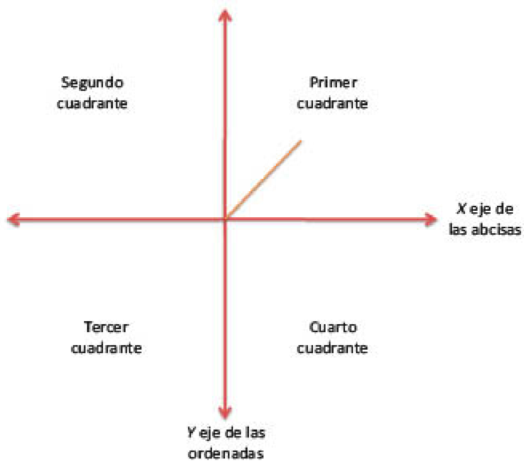
Sistema de coordenadas y pares ordenados

El plano cartesiano es de gran utilidad para localizar gráficamente pares ordenados y gráficas de funciones, las cuales ayudan a tener una mejor comprensión de las expresiones algebraicas.

Se forma trazando dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado *origen*, que se representa con la letra o, formándose así cuatro semiejes, dos positivos y dos negativos.

Eje horizontal*:* se le denomina eje de las abscisas o eje de las *x*
Eje vertical*:* se le denomina eje de las ordenadas o eje de las *y*

El plano cartesiano está dividido en cuatro partes llamados cuadrantes, que se representan de la siguiente manera:



Los cuadrantes siempre van ordenados en sentido contrario a las manecillas del reloj, comenzando con el de la parte superior derecha, y cada pareja ordenada dentro de él denota primero el eje de las abscisas y luego el de las ordenadas, formando así un punto con coordenadas P(*x,y*).

Sabías que…

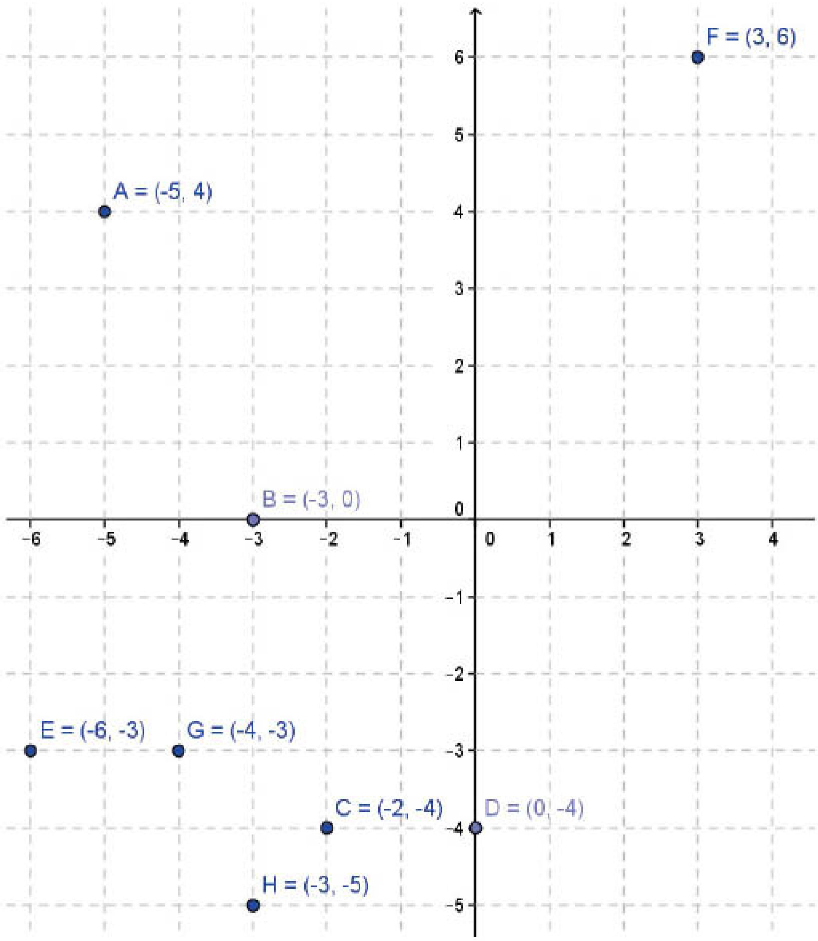
El concepto de coordenada cartesiana no fue obra del propio Descartes, sino del alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1640-1716).

Parejas ordenadas de números

Recuerda que en los pares ordenados siempre va primero la letra *x* y luego la letra *y*, formando la pareja (*x*,*y*).

Para localizar el punto *x* se busca el número en el eje horizontal, y luego el punto *y* en el eje vertical.

Por ejemplo, se localizan los siguientes puntos en el plano cartesiano:
A(-5,4), B(-3,0), C(-2,-4), D(0,-4), E(-6,-3), F(3,6), G(-4,-3) y H(-3,-5)



Las parejas ordenadas de números son un agrupamiento de elementos tomados de dos en dos y siguiendo un orden preestablecido, cuya fórmula es *A* x *B*.

Por ejemplo: se toma cada uno de los elementos del primer conjunto y se le asocia con cada uno de los elementos del segundo conjunto, y así vamos obteniendo una igualdad de parejas ordenadas *A* x *B*.

Si consideramos al conjunto A como A{a,b,c} y al conjunto B como B{3,4} , entonces, la igualdad de parejas son: (a,3), (a,4), (b,3), (b,4), (c,3), (c,4).

Si tuviéramos los conjuntos de un tablero de ajedrez A{a,b,c,d,e,f,g,h} y el conjunto B{1,2,3,4,5,6,7,8}.

Entonces la igualdad de parejas son:

(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (a,6), (a,7), (a,8)

(b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (b,5), (b,6), (b,7), (b,8)

(c,1), (c,2), (c,3), (c,4), (c,5), (c,6), (c,7), (c,8)

(d,1), (d,2), (d,3), (d,4), (d,5), (d,6), (d,7), (d,8)

(e,1), (e,2), (e,3), (e,4), (e,5), (e,6), (e,7), (e,8)

(f,1), (f,2), (f,3), (f,4), (f,5), (f,6), (f,7), (f,8)

(g,1), (g,2), (g,3), (g,4), (g,5), (g,6), (g,7), (g,8)

(h,1), (h,2), (h,3), (h,4), (h,5), (h,6), (h,7), (h,8)

"Incluso en los juegos de niños hay cosas para interesar al matemático más grande".

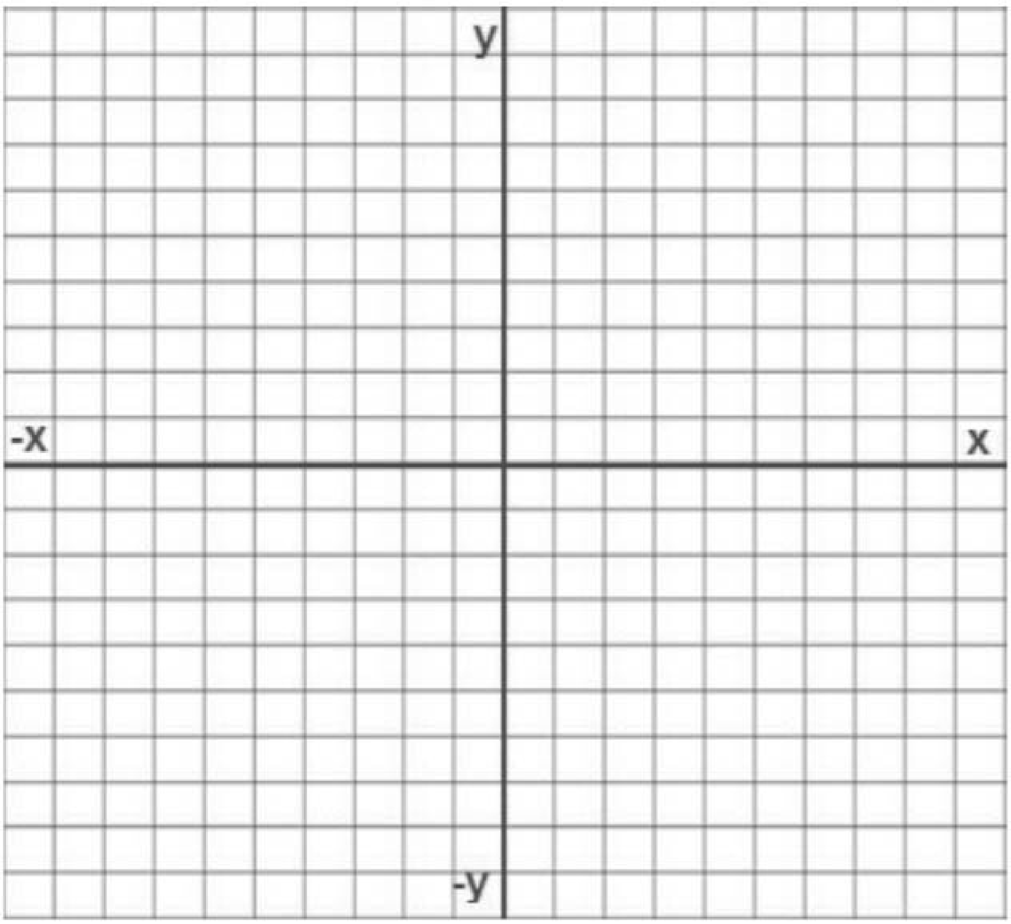
- Gottfried Wilhelm Leibniz

Aplica lo aprendido

Actividad 1

1. Localiza los siguientes pares ordenados en el plano cartesiano, indicando la letra y el par ordenado.

A(-3,5)	B(4,2)	C(5,-2)	D(-4,-3)	E(4,-4)
F(6,3)	G(-5,2)	H(-2,-2)	I(-6,4)	J(3,-5)



Dados los siguientes conjuntos, obtén la igualdad de parejas ordenadas:

2. Conjunto A{l,m,m,j,v,s,d} y conjunto B{1,2,3,4}

____

3. Conjunto A{r,g,b} y conjunto B{8,9,10,11}

____

4. Define los conjuntos que dan origen a la siguiente igualdad de parejas ordenadas:

{-1,1}, {-1,3}, {-1,5}, {-1,7}, {-1,9}
{-2,1}, {-2,3}, {-2,5}, {-2,7}, {-2,9}
{-3,1}, {-3,3}, {-3,5}, {-3,7}, {-3,9}
{-5,1}, {-5,3}, {-5,5}, {-5,7}, {-5,9}

Conjunto A ____________________ Conjunto B ____________________

5. Define los conjuntos que dan origen a la siguiente igualdad de parejas ordenadas:

{3,-11}, {3,-9}, {3,-7}, {3,-5}, {3,-3}, {3,-1}
{4,-11}, {4,-9}, {4,-7}, {4,-5}, {4,-3}, {4,-1}
{5,-11}, {5,-9}, {5,-7}, {5,-5}, {5,-3}, {5,-1}
{6,-11}, {6,-9}, {6,-7}, {6,-5}, {6,-3}, {6,-1}
{7,-11}, {7,-9}, {7,-7}, {7,-5}, {7,-3}, {7,-1}

Conjunto A ____________________ Conjunto B ____________________

6. Reúnete con dos compañeros y localicen en el siguiente mapa de la República Mexicana, las coordenadas de longitud (horizontal) y latitud (vertical) de los siguientes incisos. Las capitales de los estados están marcadas con una estrella.

a) La capital de Zacatecas _____________

b) La capital de Jalisco _____________

c) La capital de Guanajuato _____________

d) La capital de Nuevo León _____________

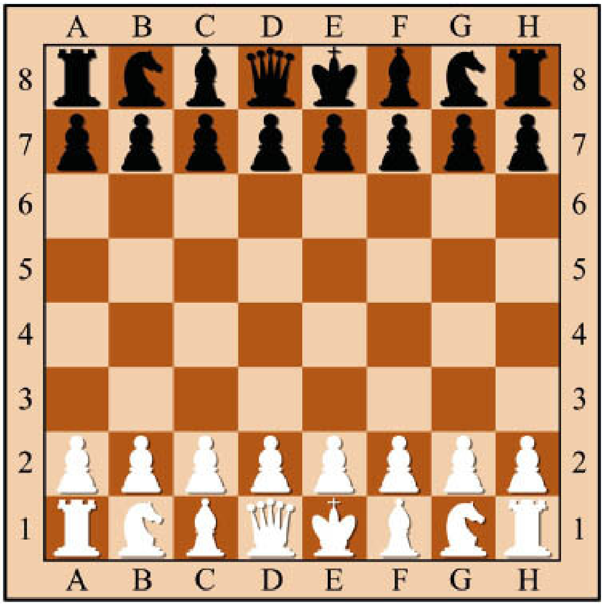
e) La capital del Estado de México _____________

f) El Distrito Federal _____________

g) ¿Qué estado se encuentra en las coordenadas (111°, 25°)? _____________

h) ¿Qué estado se encuentra en las coordenadas (90°, 21°)? _____________

7. Reúnete en grupos de cuatro compañeros y ubiquen las coordenadas de las piezas en el siguiente tablero de ajedrez:



a) ¿En qué coordenadas se encuentra el caballo blanco de la casilla negra? ______________

b) ¿En qué coordenadas se encuentra la reina blanca? ______________

c) ¿En qué coordenadas se encuentra el rey negro? ______________

d) ¿En qué coordenadas se encuentra el alfil negro que está en la casilla blanca? ______________

e) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (C,1)? ______________

f) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (H,8)? ______________

g) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (E,8)? ______________

h) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (D,2)? ______________

Con la realización de estos ejercicios, reflexiona si identificas los pares ordenados y si eres capaz de ubicarlos en un plano.
Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Sabías que...

Duncan Forbes, en su libro *Historia del ajedrez* (1860), señala que el ajedrez tiene su origen en India, y se remonta al siglo VI d.C. Se considera a Susa Ben Dahir como su inventor.

Aprende más

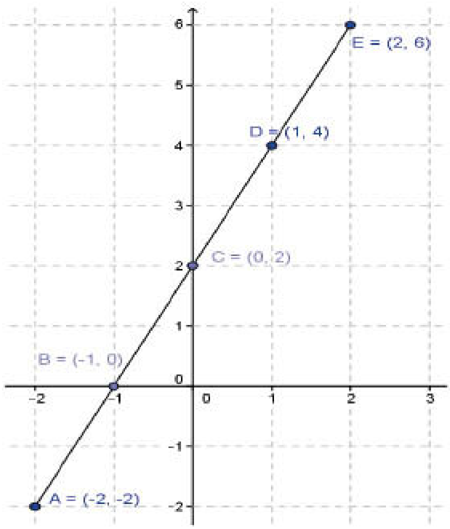
Lugares geométricos

Un lugar geométrico es el conjunto de los puntos (x,y) que cumplen con una misma propiedad o condición geométrica, representada por una ecuación. Ejemplos de lugares geométricos son la distancia entre dos puntos (línea recta), una parábola, una circunferencia, una elipse, una bisectriz, etcétera.

Ejemplos:
A partir del enunciado, encuentra la ecuación, elabora la tabla y dibuja la gráfica que representan los siguientes lugares geométricos.

La ordenada es el doble de la abscisa más dos.
La ecuación que satisface el planteamiento es: $y = 2x + 2$

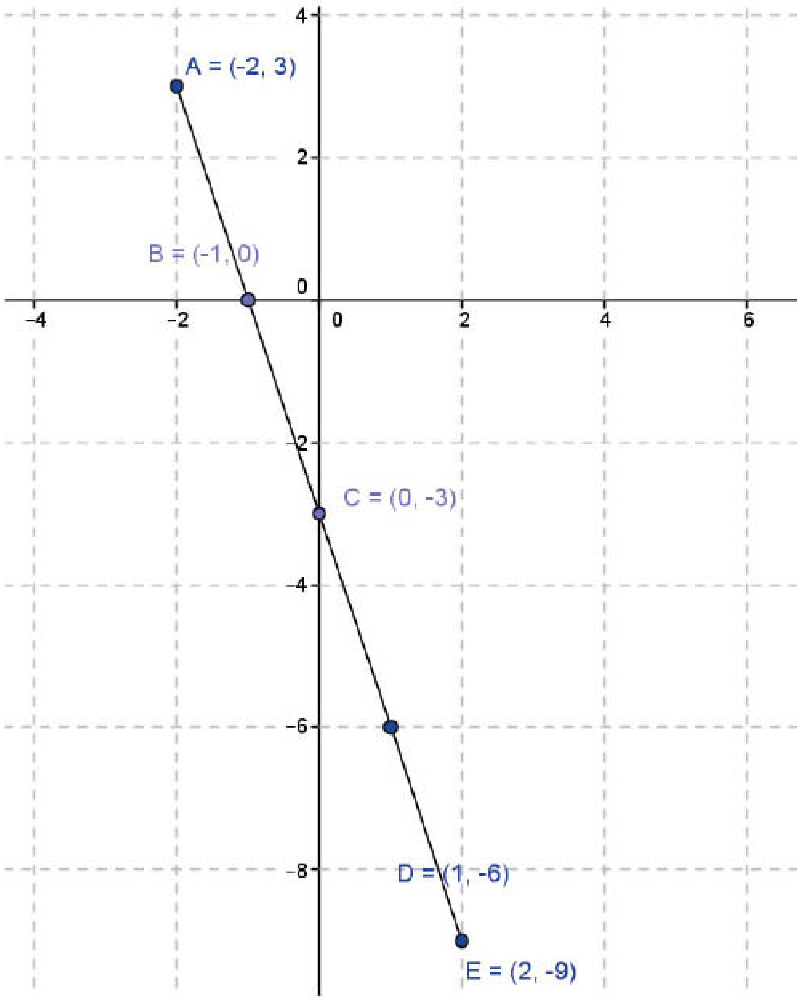
Valor de x	$y = 2x + 2$	Valor de y	Puntos
-2	2 (-2) + 2 = -4 + 2	-2	A(-2, -2)
-1	2 (-1) + 2 = -2 + 2	0	B(-1, 0)
0	2 (0) + 2 = 0 + 2	2	C(0, 2)
1	2 (1) + 2 = 2 + 2	4	D(1, 4)
2	2 (2) + 2 = 4 + 2	6	E(2, 6)



La ordenada es menos el triple de la abscisa menos tres.

La ecuación que satisface el planteamiento es: y = -3x - 3

Valor de x	y = -3x – 3	Valor de y	Puntos
-2	-3 (-2) - 3 = 6 - 3	3	A(-2, 3)
-1	-3 (-1) - 3 = 3 - 3	0	B(-1, 0)
0	-3 (0) - 3 = 0 - 3	-3	C(0, -3)
1	-3 (1) - 3 = -3 - 3	-6	D(1, -6)
2	-3 (2) - 3 = -6 - 3	-9	E(2, -9)

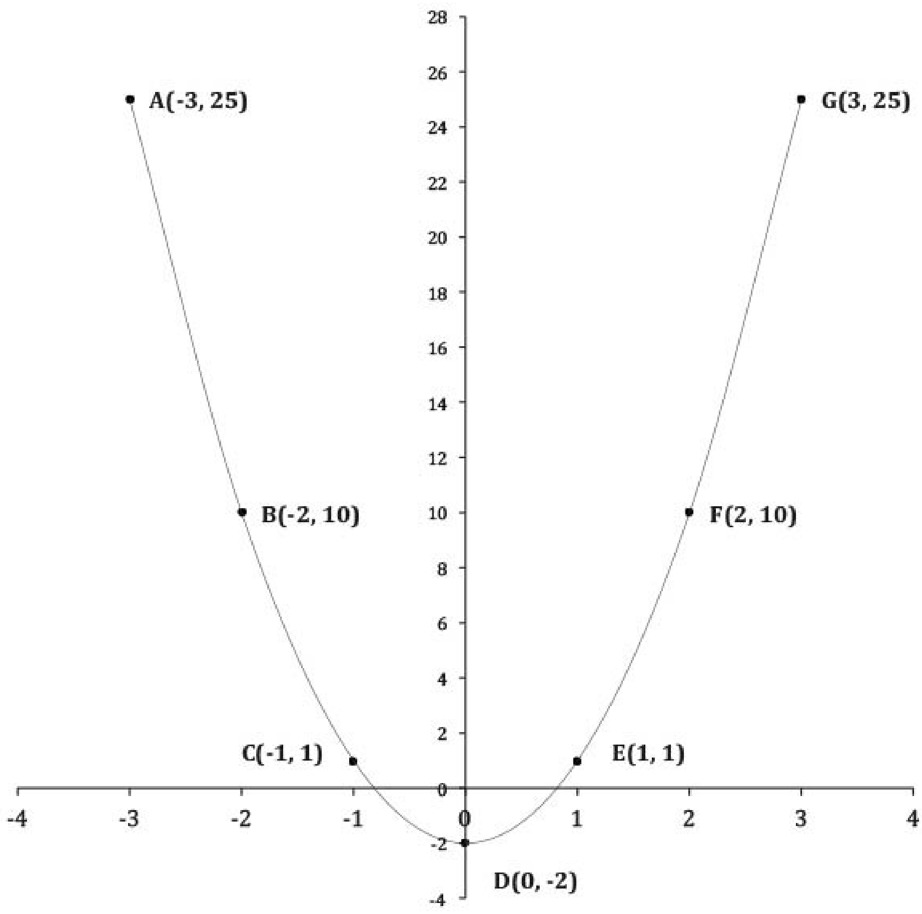


Conclusión: Al observar la gráfica, podemos afirmar que cuando una ecuación contiene variables elevadas a la potencia 1, el lugar geométrico que representa es una recta.

La ordenada es igual a tres veces el cuadrado de la abscisa menos dos.

La ecuación que satisface el planteamiento es: $y = 3x^2 - 2$

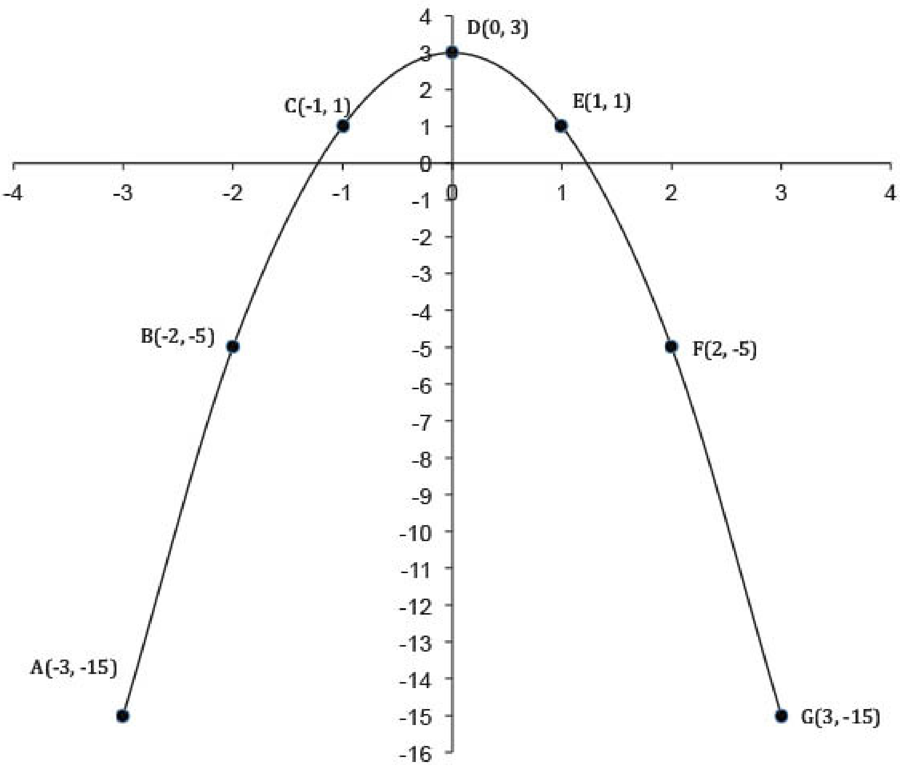
Valor de x	$y = 3x^2 - 2$	Valor de y	Puntos
-3	3 (-3)2 – 2 = 3(9) – 2 = 27 – 2	25	A(-3, 25)
-2	3 (-2)2 – 2 = 3(4) – 2 = 12 – 2	10	B(-2, 10)
-1	3 (-1)2 – 2 = 3(1) – 2 = 3 – 2	1	C(-1,1)
0	3 (0)2 – 2 = 3(0) – 2 = 0 – 2	-2	D(0, -2)
1	3 (1)2 – 2 = 3(1) – 2 = 3 – 2	1	E(1, 1)
2	3 (2)2 – 2 = 3(4) – 2 = 10	10	F(2,10)
3	3 (3)2 – 2 = 3(9) – 2 = 27 – 2	25	G(3,25)



La ordenada es igual a menos dos veces el cuadrado de la abscisa más tres.

La ecuación que satisface el planteamiento es: $y = -2x^2 + 3$

Valor de x	$y = -2x^2 + 3$	Valor de y	Puntos
-3	-2(-3)2 + 3 = -2(9) + 3 = -18 + 3	-15	A(-3,-15)
-2	-2(-2)2 + 3 = -2(4) + 3 = -8 + 3	-5	B(-2,-5)
-1	-2(-1)2 + 3 = -2(1) + 3 = -2 + 3	1	C(-1,1)
0	-2(0)2 + 3 = -2(0) + 3 = 0 + 3	3	D(0, 3)
1	-2(1)2 + 3 = -2(1) + 3 = -2 + 3	1	E(1,1)
2	-2(2)2 + 3 = -2(4) + 3 = -8 + 3	-5	F(2,-5)
3	-2(3)2 + 3 = -2(9) + 3 = -18 + 3	-15	G(3,-15)



Conclusión: Al observar la gráfica, podemos afirmar que cuando una ecuación contiene una variable elevada a la potencia 2 y las otras no, el lugar geométrico que representa es una *parábola*.

La suma de la abscisa elevada al cuadrado más la suma de la ordenada elevada al cuadrado es igual a 9.

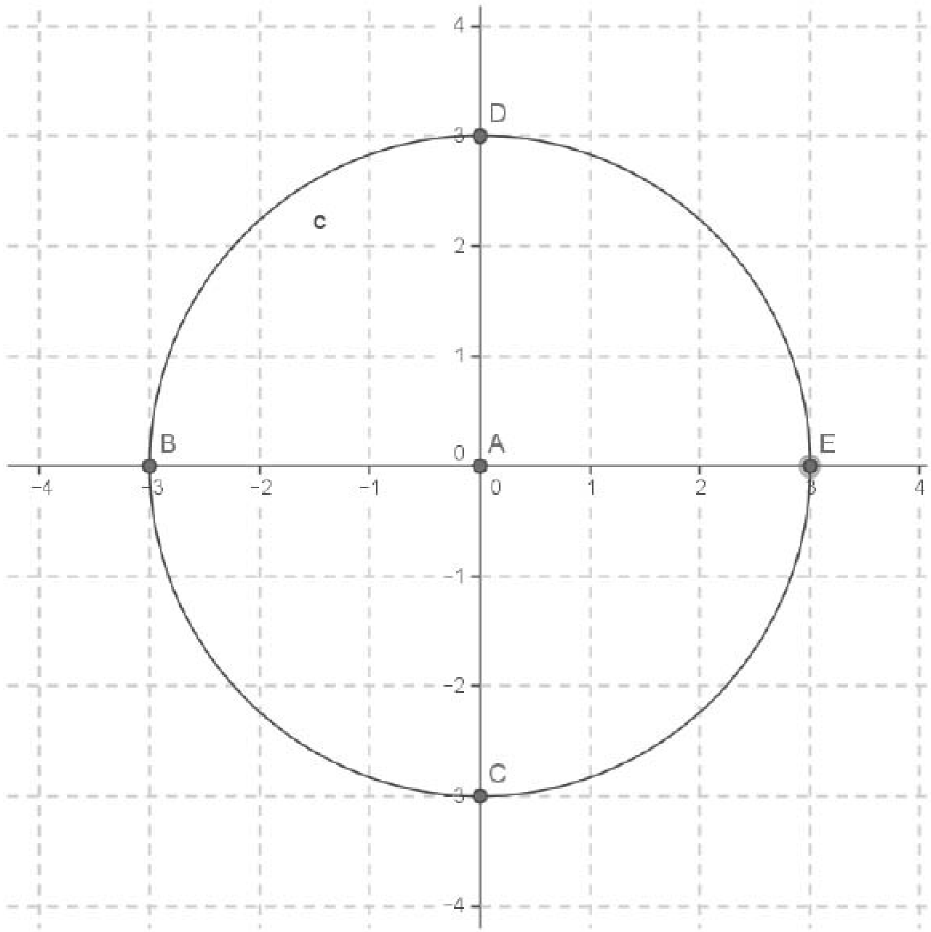
La ecuación que satisface el planteamiento es: $x^2 + y^2 = 9$

Se despeja la y, pasando la x^2 restando al 9 $y^2 = 9 - x^2$

y sacando raíz cuadrada en ambos lados $y = \sqrt{9 - x^2}$

Valor de x	$y = \sqrt{9 - x^2}$	Valor de y	Puntos
-3	$\sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-9}$	0	B(-3,0)
0	$\sqrt{9-(0)^2} = \sqrt{9-0}$	-3, +3	C(0,-3) D(0,3)
3	$\sqrt{9-(3)^2} = \sqrt{9-9}$	0	E(3,0)

El centro de la circunferencia está en el punto A(0,0)



La suma de la abscisa elevada al cuadrado más la suma de la ordenada elevada al cuadrado es igual a 25.

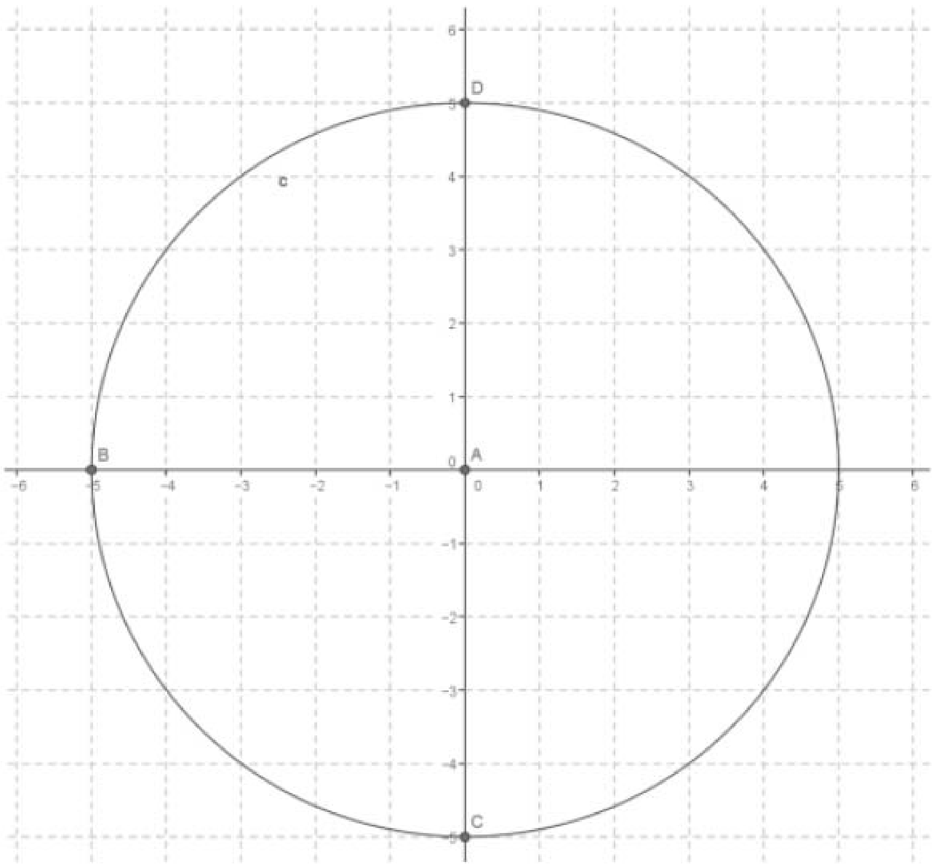
La ecuación que satisface el planteamiento es: $x^2 + y^2 = 25$

Se despeja la *y*, pasando la x^2 restando al 25 $y^2 = 25 - x^2$

y se saca la raíz cuadrada en ambos lados $y = \sqrt{25 - x^2}$

Valor de *x*	$y = \sqrt{25 - x^2}$	Valor de *y*	Puntos
-5	$\sqrt{25-(-3)^2}=\sqrt{25-25}$	0	B(-5,0)
0	$\sqrt{25-(0)^2}=\sqrt{25-0}$	-5,+5	C(0,-5) D(0,5)
5	$\sqrt{25-(3)^2}=\sqrt{25-25}$	0	E(5,0)

El centro de la circunferencia está en el punto A(0,0)



Conclusión: En este tipo de ecuaciones, ambas variables están elevadas al cuadrado y tienen los mismos coeficientes numéricos; por lo tanto, el lugar geométrico que representa es una *circunferencia*.

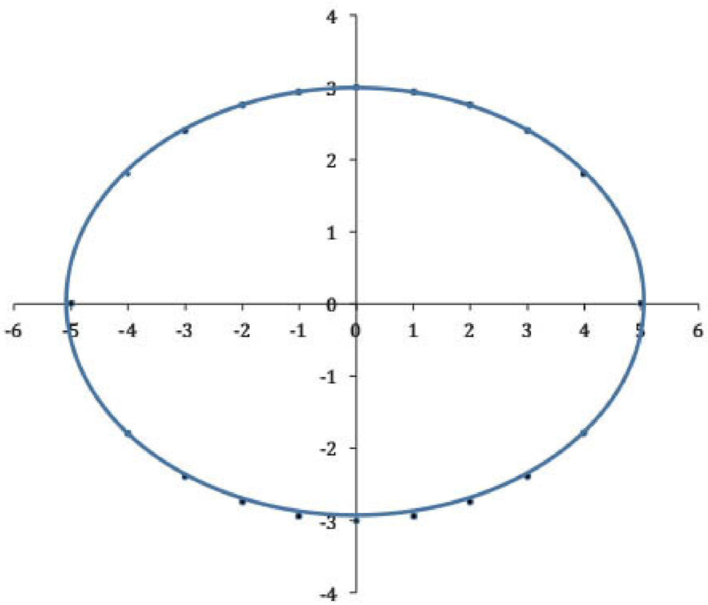
La siguiente ecuación representa una elipse: $9x^2 + 25y^2 = 225$

Se despeja la y, pasando la x^2 restando al 25 $\quad y^2 = 225 - 9x^2$

y después se saca la raíz cuadrada en ambos lados $y = \sqrt{225 - 9x^2}$

Recuerda que todas las raíces cuadradas siempre tienen un valor positivo y un valor negativo.

Valor de x	Valor de y
-5	0
-5	0
-4	1.8
-4	-1.8
-3	2.4
-3	-2.4
-2	2.749545
-2	-2.74955
-1	2.939388
-1	-2.93939
0	3
0	-3
1	2.939388
1	-2.93939
2	2.749545
2	-2.74955
3	2.4
3	-2.4
4	1.8
4	-1.8
5	0
5	0



Conclusión: En este tipo de ecuaciones, ambas variables están elevadas al cuadrado y los coeficientes numéricos son diferentes; por lo tanto, el lugar geométrico que representa es una elipse.

"Lo que es afirmado sin prueba puede ser negado sin prueba".

-Euclides.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones de los siguientes ejercicios. Para encontrar sus soluciones, realiza las operaciones necesarias en tu libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros en clase. Asimismo, escucha las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

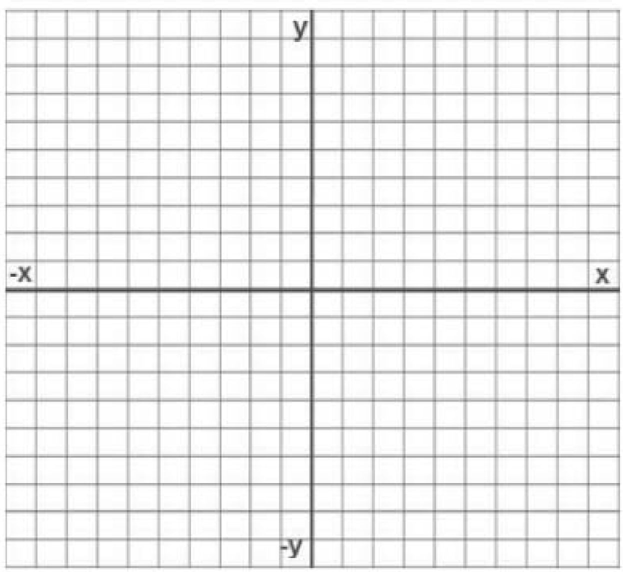
1. Responde las siguientes preguntas con base en lo estudiado previamente.

a) El eje horizontal o eje de las *x* recibe el nombre de ______________________
b) El eje vertical o eje de las *y* recibe el nombre de ________________________
c) Al punto cuyas coordenadas son (0,0) se le llama ________________________
d) El primer valor en un par ordenado corresponde a la ____ y el segundo a la ______
e) El plano cartesiano tiene _____ cuadrantes que se leen de _______________ a ______________________ en sentido __________________ al de las manecillas del reloj.
f) ¿Las rectas que forman el plano cartesiano, son paralelas o perpendiculares? ____
¿Por qué? ____

2. Partiendo del enunciado, encuentra la ecuación, elabora la tabla y dibuja las gráficas que representan los siguientes lugares geométricos:

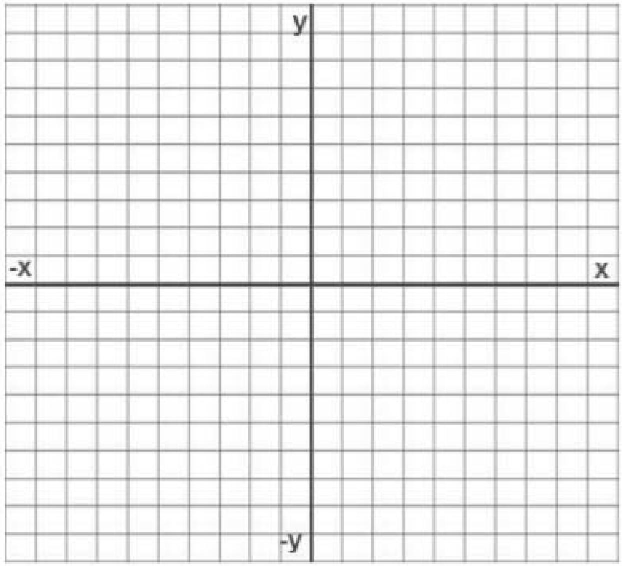
a) La ordenada es el triple de la abscisa más cuatro.

Valor de x	Ecuación $y = 3x + 4$	Valor de y	Puntos
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			



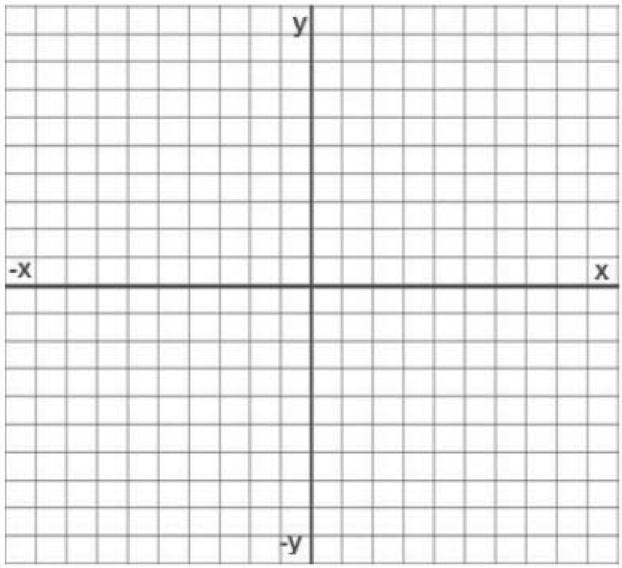
b) La ordenada es igual a tres veces el cuadrado de la abscisa menos dos.

Valor de x	Ecuación $y = 3x^2 - 2$	Valor de y	Puntos
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			



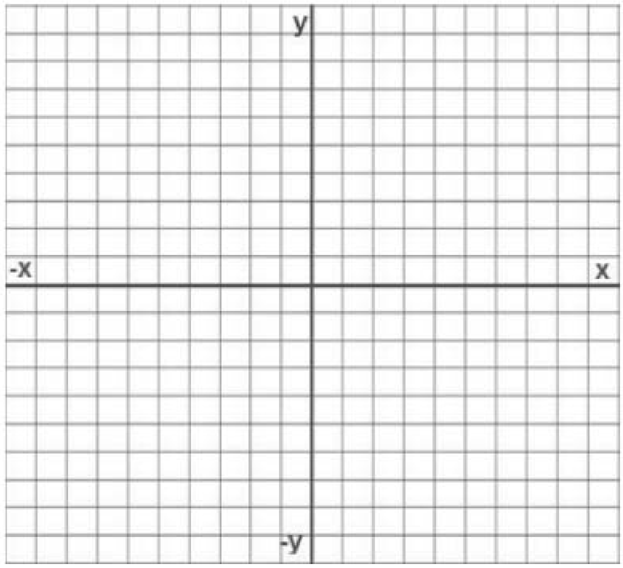
c) La abscisa al cuadrado más la ordenada al cuadrado es igual a 49.

Valor de x	Ecuación $x^2 + y^2 = 49$	Valor de y	Puntos
-7			
-6			
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			



d) Tres veces la abscisa al cuadrado más dos veces la ordenada al cuadrado es igual a 36.

Valor de x	Ecuación $3x^2 + 2y^2 = 36$	Valor de y	Puntos



3. Relaciona la ecuación con su lugar geométrico, anotando la letra que le corresponda.

Valor de x	Ecuación
( ) $x^2 + y^2 - 16 = 0$	A) Recta
( ) $3x^2 + 5y^2 - 6 = 0$	B) Parábola
( ) $2x^2 - y + 7 = 0$	C) Circunferencia
( ) $y - 4x + 6 = 12$	D) Elipse

Es muy importante que hayas podido realizar estos ejercicios, pues serán la base de todo este curso. Por ello, reflexiona *si utilizas el concepto de lugar geométrico y lo ubicas en una gráfica.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si observas los objetos que hay en tu casa, menciona por lo menos dos ejemplos que tengan la forma de los lugares geométricos estudiados en esta sección.

Recta____

Parábola____

Circunferencia____

Elipse____

Sabías que...

Los antiguos griegos fueron los primeros en afirmar que nuestro planeta es esférico. Aristóteles expuso que la Tierra era redonda.

Aprende más

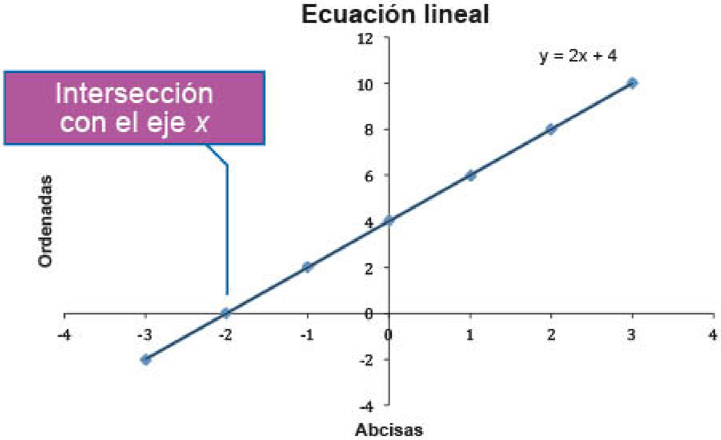
Intersección de la gráfica con los ejes del sistema de coordenadas

Se llama intersección con los ejes a los puntos (en caso de existir) donde la gráfica de una ecuación pasa por los ejes. Cuando se va a realizar la gráfica de una ecuación, es conveniente determinar:

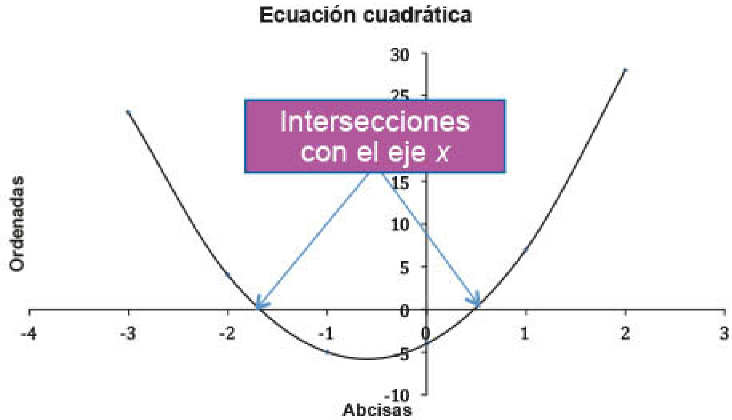
- Las intersecciones de la gráfica con los ejes del sistema de coordenadas.
- La simetría que tiene la ecuación.
- La extensión de las variables de la ecuación.

Existen varios tipos de intersecciones:

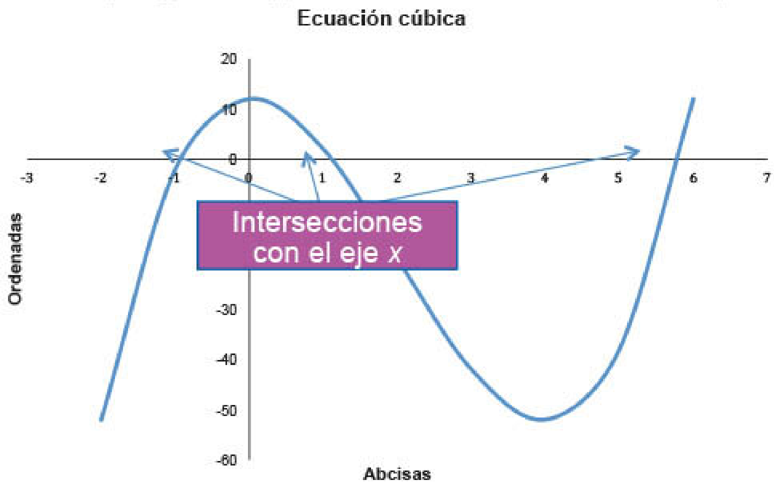
Una ecuación lineal (de grado 1) pasa como máximo una sola vez por el eje.



Una ecuación cuadrática (de grado 2) pasa como máximo dos veces por los ejes.



Una ecuación cúbica (de grado 3) pasa como máximo tres veces por los ejes.



Y así sucesivamente.

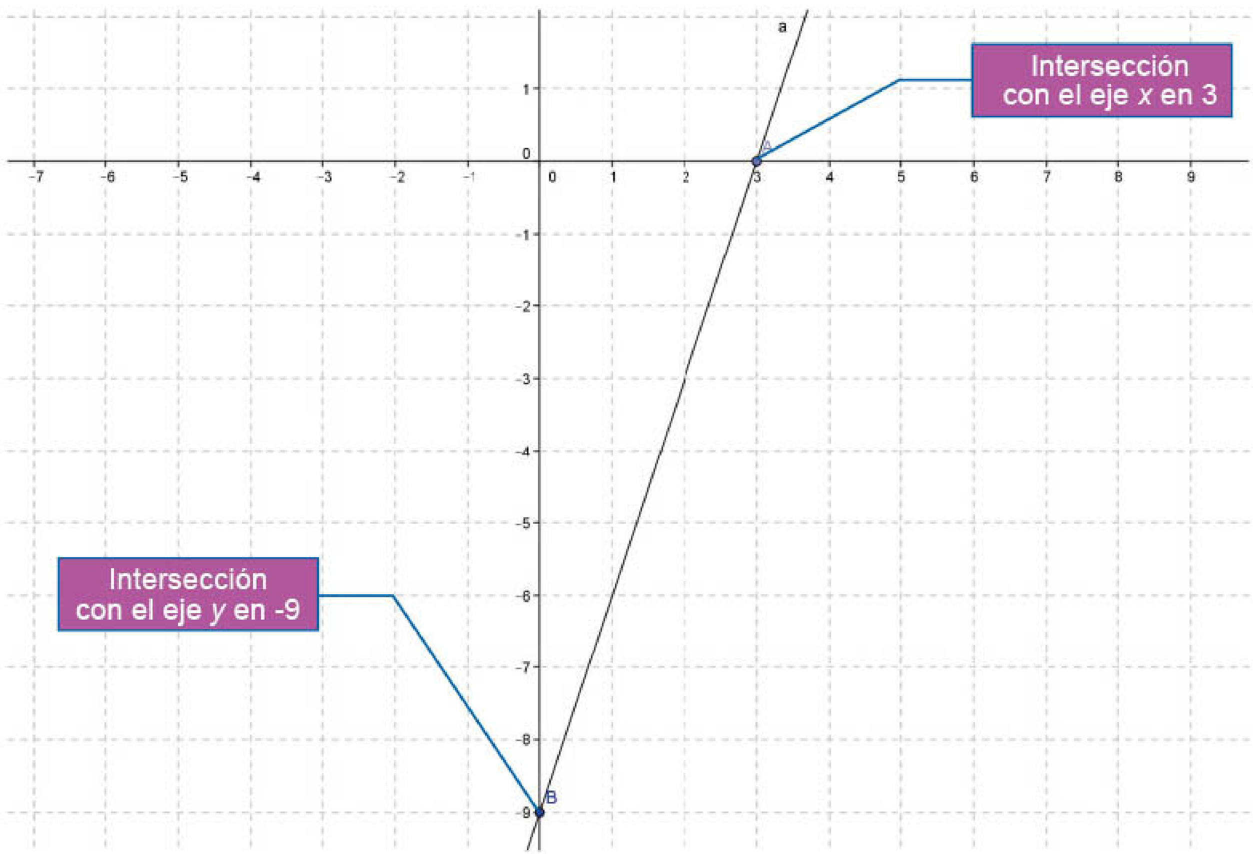
Para determinar las intersecciones con los ejes, el procedimiento es el siguiente:

- Para encontrar la intersección con el eje x, se le asigna el valor de 0 a la y.
- Para encontrar la intersección con el eje y, se le asigna el valor de 0 a la x.

Por ejemplo:
En la ecuación $y = 3x - 9$

Para encontrar la intersección con el eje x se asigna $y = 0$	Para encontrar la intersección con el eje y se asigna $x = 0$
$0 = 3x - 9$ $3x = 9$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$	$y = 3(0) - 9$ $y = 0 - 9$ $y = -9$

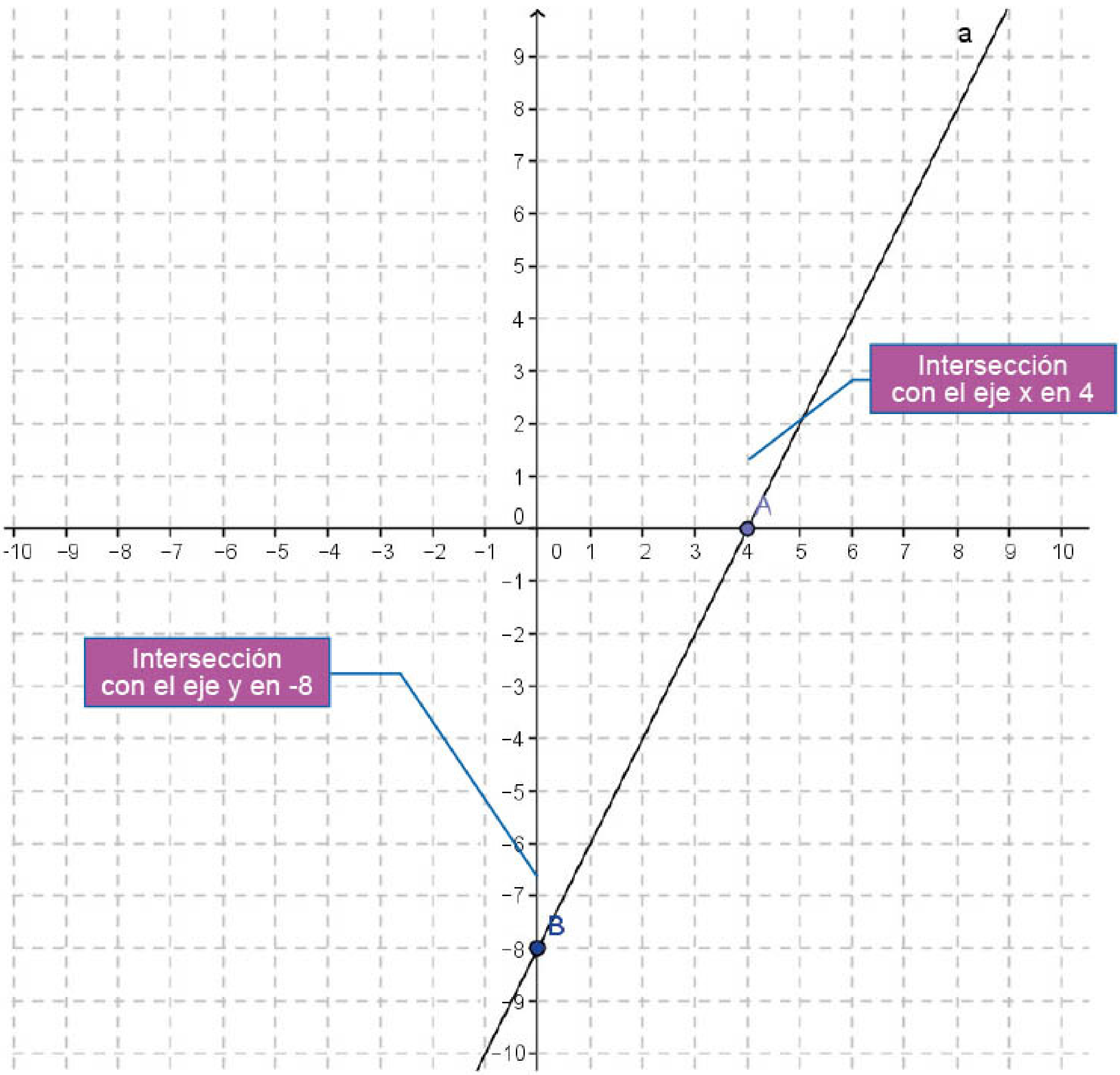
En la gráfica los puntos de intersección con los ejes quedan de la siguiente manera:



Por ejemplo:
En la ecuación $6x - 3y - 24 = 0$

Para encontrar la intersección con el eje *x* se asigna y = 0.	Para encontrar la intersección con el eje *y* se asigna *x* = 0.
$6x - 3(0) - 24 = 0$ $6x = 24$ $x = \frac{24}{6}$ $x = 4$	$6(0) - 3y - 24 = 0$ $-3y = 24$ $y = \frac{24}{-3}$ $y = -8$

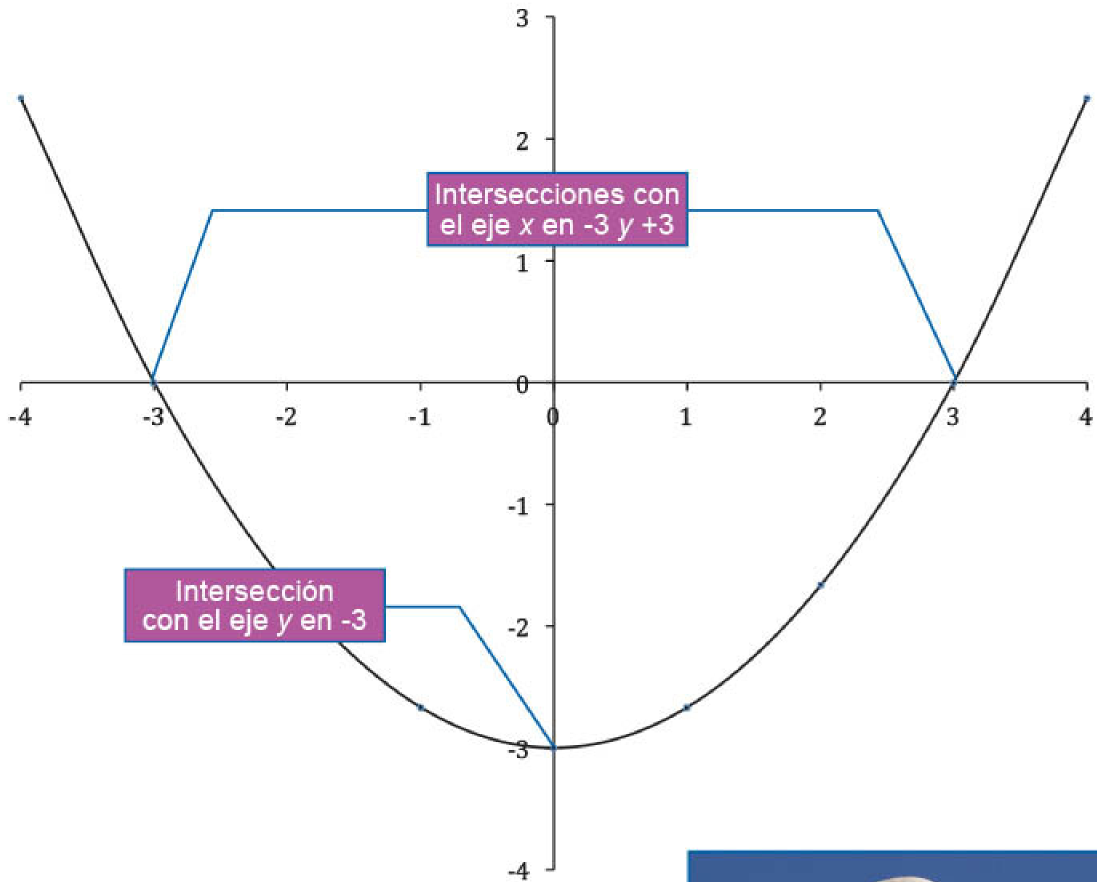
En la gráfica los puntos de intersección con los ejes quedan de la siguiente manera:



Por ejemplo:
En la ecuación $2x^2 - 6y - 18 = 0$

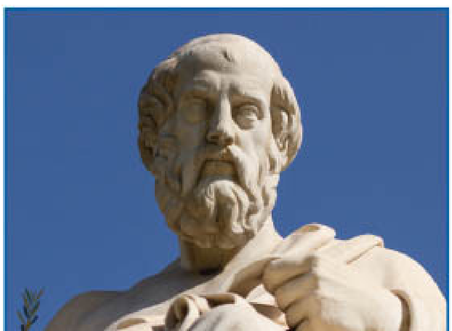
Para encontrar las intersecciones con el eje x se asigna $y = 0$	Para encontrar la intersección con el eje y se asigna $x = 0$
$2x^2 - 6(0) - 18 = 0$ $2x^2 = 18$ $x^2 = \frac{18}{2}$ $x = \pm\sqrt{9}$ $x = +3,\ x = -3$	$2(0)^2 - 6y - 18 = 0$ $-6y = 18$ $y = \frac{18}{-6}$ $y = -3$

En la gráfica los puntos de intersección con los ejes quedan de la siguiente manera:



"La inteligencia consiste no sólo en el conocimiento, sino también en la destreza de aplicar los conocimientos en la práctica".

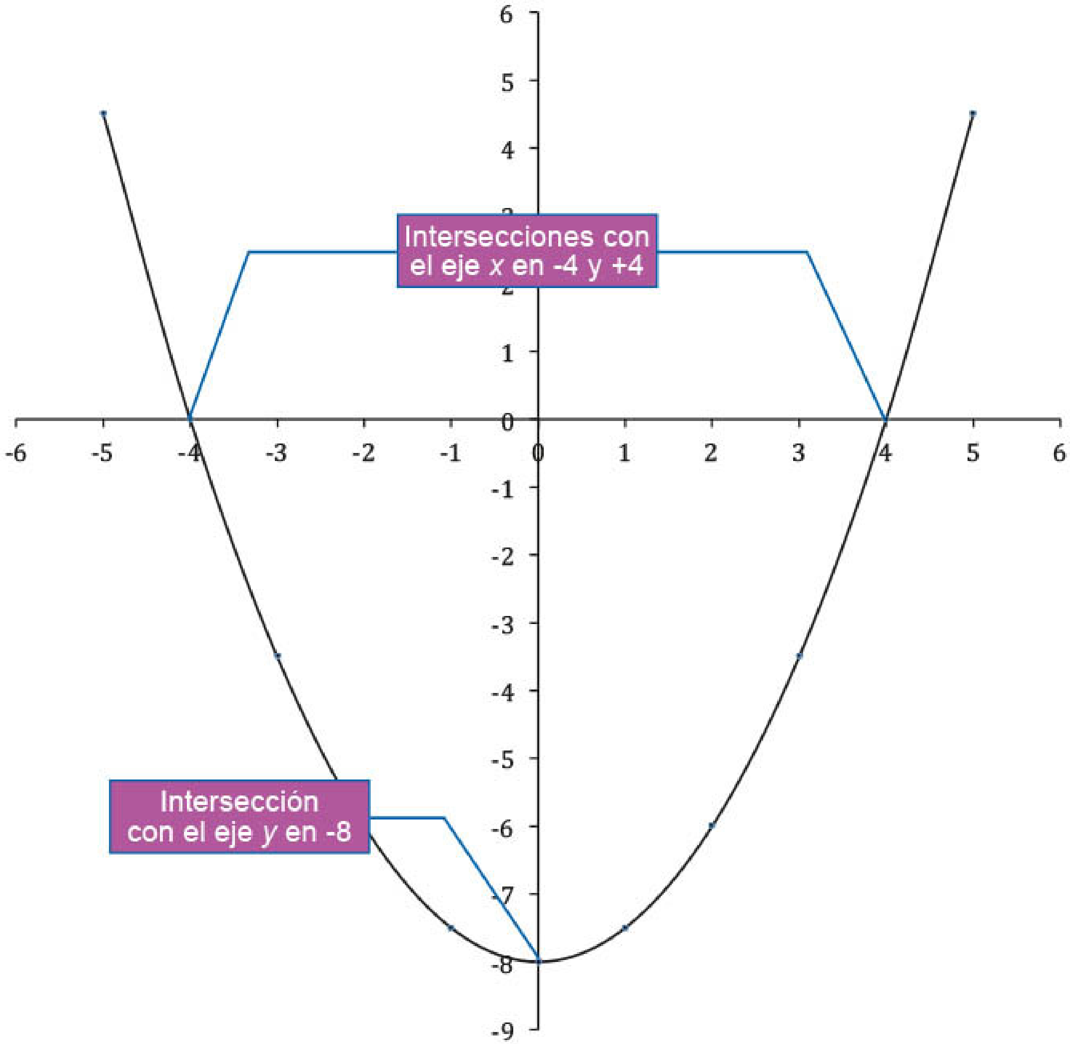
-Aristóteles



Por ejemplo:
En la ecuación $-4x^2 + 8y + 64 = 0$

Para encontrar las intersecciones con el eje x se asigna $y = 0$	Para encontrar la intersección con el eje y se asigna $x = 0$
$-4x^2 + 8(0) + 64 = 0$ $-4x^2 = -64$ $x^2 = \frac{-64}{-4}$ $x = \pm\sqrt{16}$ $x = +4,\ x = -4$	$-4(0)^2 + 8y + 64 = 0$ $8y = -64$ $y = \frac{-64}{8}$ $y = -8$

En la gráfica los puntos de intersección con los ejes quedan de la siguiente manera:

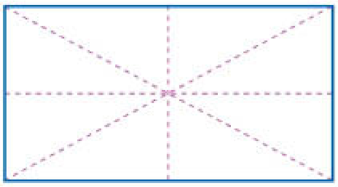


Aprende más

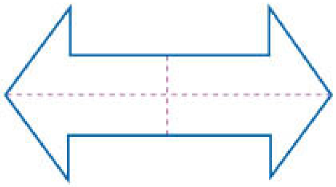
Simetría de una gráfica

Simetría: es la correspondencia exacta —con relación con un centro, un eje o un plano— de la disposición regular de las partes o puntos de una figura o un cuerpo.

Recuerda que en cursos anteriores habías estudiado la simetría de objetos. Por ejemplo:



Esta figura tiene 4 ejes de simetría.



Esta figura tiene 2 ejes de simetría.

Esta figura no tiene simetría.

Encontrar la simetría en lugares geométricos se puede realizar de la siguiente manera:

Simetría con respecto a x:

Una ecuación es simétrica con respecto al eje x, si la ecuación no se altera al sustituir el valor de y por el de $-y$, es decir, si para cada punto $P(x,y)$ que le pertenezca, también le pertenecerá el punto $P(x,-y)$.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $y^2 = 3x$, al darle un valor a x, como $x = 3$ tenemos:

$y = \pm\sqrt{3x}$

$y = \pm\sqrt{3(3)}$

$y = \pm\sqrt{9}$

$y = \pm 3$, o bien, $y = +3 \quad y = -3$

Se puede observar entonces que los puntos (3,3) y (3,-3) pertenecen a la gráfica.

Al sustituir y por $-y$ se tiene:
$(-y)^2=3x$ y al elevar al cuadrado la y se tiene $\quad y^2 = 3x$

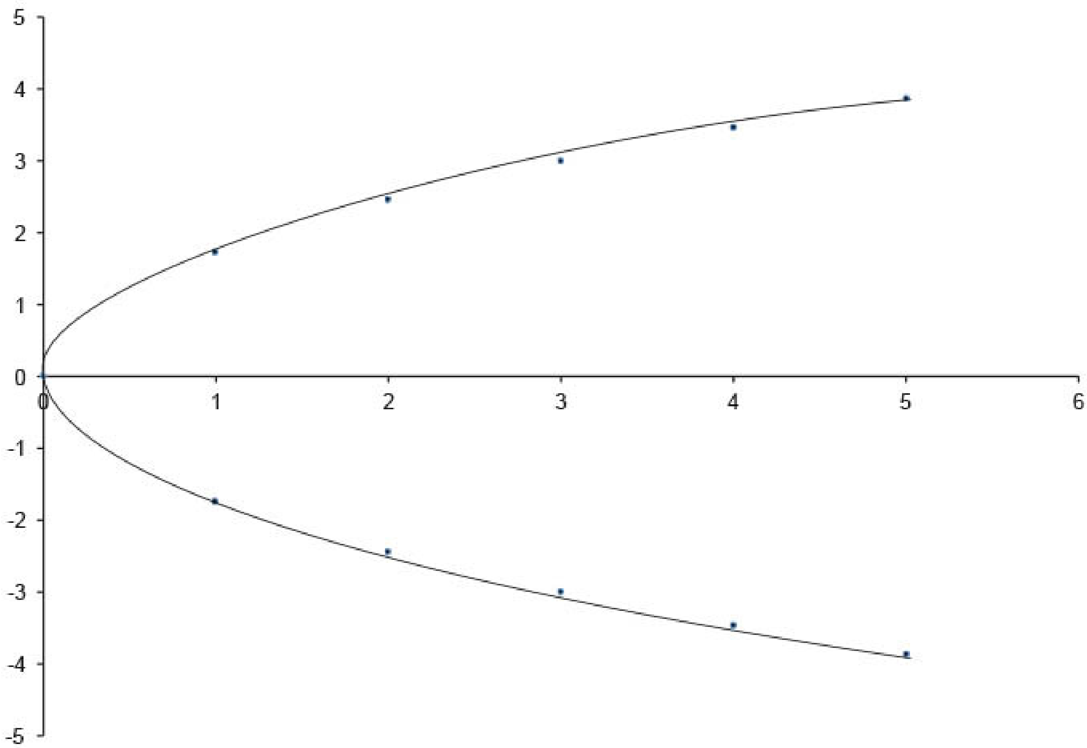
Por ejemplo, verifica si la ecuación
$y^2 - 3x + 2 = 0$ es simétrica

Solución:

Al sustituir el valor de y por $-y$ en la ecuación, se tiene:
$(-y)^2 - 3x + 2 = 0$

$y^2 - 3x + 2 = 0$

Como la ecuación resultante al sustituir y por $-y$ es equivalente a la original, se comprueba que sí es simétrica con respecto al eje x.



Otro ejemplo: verifica si la ecuación

$5y^2 + 4x - 3 = 0$ es simétrica

Solución:

Al sustituir el valor de *y* por $-y$ en la ecuación, se tiene:

$5(-y^2) + 4x - 3 = 0$

$5(y^2) + 4x - 3 = 0$

$5y^2 + 4x - 3 = 0$

Como la ecuación resultante al sustituir *y* por $-y$ es equivalente a la original, se comprueba que sí es simétrica con respecto al eje *x*.

Simetría con respecto al eje *y*

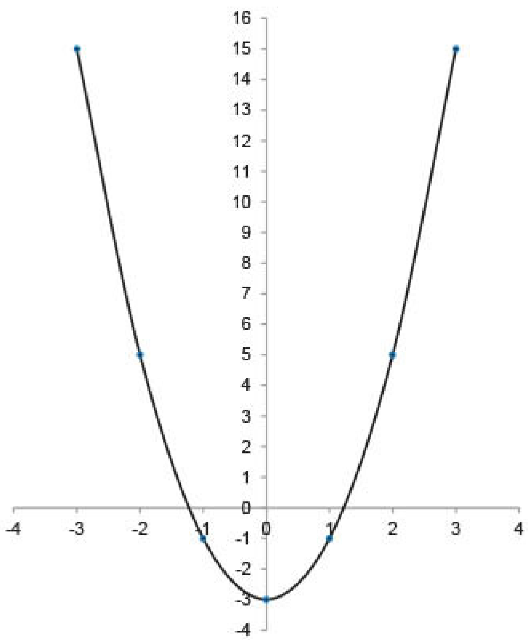
Una ecuación es simétrica con respecto al eje *y*, si la ecuación no se altera al sustituir el valor de x por el de $-x$, es decir, si para cada punto $P(x,y)$ que le pertenezca, también le pertenecerá el punto $P(-x,y)$.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $y = 2x^2 + 3$, al darle un valor a x, como $x = 2$ tenemos:

$y = 2(2)^2 - 3$
$y = 2(4) - 3$
$y = 8 - 3$
$y = 5$

Al darle ahora el valor de $x = -2$ tenemos:
$y = 2(-2)^2 - 3$
$y = 2(4) - 3$
$y = 8 - 3$
$y = 5$

Se puede observar entonces que los puntos (2,5) y (-2,5) pertenecen a la gráfica.



Por ejemplo: verifica si la ecuación $y = -4x^2 + 2$ es simétrica

Solución:
Al sustituir el valor de x por $-x$ en la ecuación, se tiene:

$y = -4(-x)^2 + 2$
$y = -4(x^2) + 2$
$y = -4x^2 + 2$

Como la ecuación resultante al sustituir x por $-x$ es equivalente a la original, se comprueba que sí es simétrica con respecto al eje *x*.

Otro ejemplo: verifica si la ecuación $y = 5x^2 - 4$ es simétrica

Solución:

Al sustituir el valor de x por -x en la ecuación, se tiene:

$y = 5(-x)^2 - 4$
$y = 5(x^2) - 4$
$y = 5x^2 - 4$

Como la ecuación resultante al sustituir y por $-y$ es equivalente a la original, se comprueba que sí es simétrica con respecto al eje *x*.

Simetría con respecto al origen.

Para saber si una gráfica es simétrica con respecto al origen, si al pasar por cada punto P*(x,y)* también lo estará cada punto P'*(-x,-y)*.

Por ejemplo: si tenemos la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, al cambiar el valor de x por $-x$ y el valor de y por $-y$, tenemos:

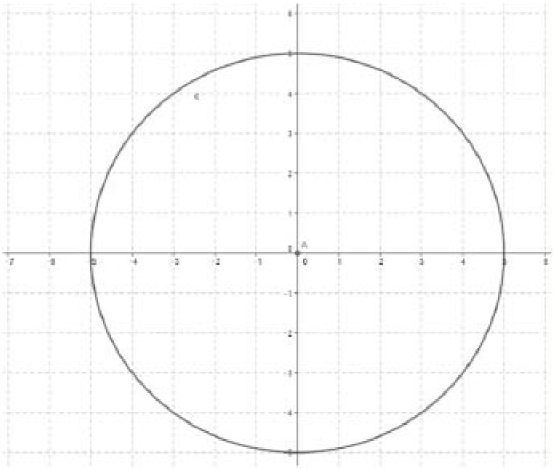
$(x)^2 + (y)^2 - 25 = (-x)^2 + (-y)^2 - 25$
$x^2 + y^2 - 25 = x^2 + y^2 - 25$

Se puede observar entonces que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Si asignamos un valor a x y un valor a y, por ejemplo, $x = 3$, $y = 4$, tenemos:

$(3)^2 + (4)^2 - 25 = (-3)^2 + (-4)^2 - 25$
$9 + 16 - 25 = 9 + 16 - 25$
$0 = 0$

La gráfica quedaría de la siguiente manera:



Por ejemplo, verifica si la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es simétrica

Solución:
Al sustituir el valor de x por $-x$ y el valor de y por $-y$ en la ecuación, se tiene:
$(x)^2 + (y)^2 - 9 = (-x)^2 + (-y)^2 - 9$
$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 9$

Como la ecuación resultante al sustituir el valor de x por -x y el valor de y por -y es equivalente a la original, se comprueba que sí es simétrica con respecto al origen.

Otro ejemplo, verifica si la ecuación $3x^2 + 4y^2 = 28$ es simétrica

Solución:
Al sustituir el valor de x por $-x$ y el valor de y por $-y$ en la ecuación, se tiene:

$3(x)^2 + 4(y)^2 - 28 = 3(-x)^2 + 4(-y)^2 - 28$
$3x^2 + 4y^2 - 28 = 3x^2 + 4y^2 - 28$

Como la ecuación resultante al sustituir el valor de x por -x y el valor de y por -y es equivalente a la original, se comprueba que sí es simétrica con respecto al origen.

Aprende más

Extensión de una gráfica

Los intervalos de variación para los cuales, los valores de x y de y son reales, son la extensión de una gráfica.

Existen ecuaciones cuyas gráficas son líneas o curvas continuas, es decir, no tienen interrupciones. Ejemplo de estas ecuaciones son todas aquellas cuya potencia máxima en x es 1 o 2, como $y = 3x - 2$; $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Pero también existen ecuaciones cuyas gráficas son discontinuas, que son las ecuaciones racionales, es decir, donde una función está siendo dividida por otra función.

Por ejemplo, $y = \frac{2x+3}{x-5}$. Al darle el valor a $x = 5$, la gráfica se vuelve discontinua, ya que el denominador se haría cero ($5 - 5 = 0$) y como la división entre cero no está definida, en el punto $x = 5$ no hay gráfica para esta ecuación.

Calcularemos los intervalos para x siguiendo este procedimiento:

1. Se despeja la variable y (si es posible) para encontrar la extensión de la variable x.
2. Se determinan los valores de x en los cuales los valores de y son números reales.

Calcularemos los intervalos para y siguiendo este procedimiento:

1. Se despeja la variable x (si es posible) para encontrar la extensión de la variable y.
2. Se determinan los valores de y en los cuales los valores de x son números reales.

Por ejemplo: encuentra las extensiones de las variables x y y para la ecuación:
$2x + 4y = 8$

Solución:

Se despeja la variable y para encontrar la extensión de la variable x: $4y = 8 - 2x$ $y = \frac{8-2x}{4} = 2 - 0.5x$ El intervalo de valores que puede tomar la x es desde $-\infty$ hasta $+\infty$, es decir, cualquier valor del conjunto de los números reales.	Se despeja la variable x para encontrar la extensión de la variable y: $2x = 8 - 4y$ $x = \frac{8-4y}{2} = 4 - 2y$ El intervalo de valores que puede tomar la y es desde $-\infty$ hasta $+\infty$, es decir, cualquier valor del conjunto de los números reales.

Por ejemplo: encuentra las extensiones de las variables x y y para la ecuación $3x^2 - y - 6 = 0$

Solución

Se despeja la variable y para encontrar la extensión de la variable x:	Se despeja la variable x para encontrar la extensión de la variable y:
$3x^2 - 6 = y$ El intervalo de valores que puede tomar la x es desde $-\infty$ hasta $+\infty$, es decir puede tomar cualquier valor del conjunto de los números reales.	$3x^2 - 6 = y$ $3x^2 = y + 6$ $x^2 = \frac{y+6}{3}$ $x = \sqrt{\frac{y+6}{3}}$ El intervalo de valores que puede tomar la y es desde -6 hasta $+\infty$, ya que si se da un valor menor a -6, por ejemplo, -7 $x = \sqrt{\frac{-7+6}{3}} = \sqrt{\frac{-1}{3}}$ La raíz se hace negativa y no se puede calcular el valor.

Por ejemplo: encuentra las extensiones de las variables x y y para la ecuación $x^2 + y^2 = 25$

Solución

Se despeja la variable y para encontrar la extensión de la variable x:	Se despeja la variable x para encontrar la extensión de la variable y:
$y^2 = 25 - x^2$ $y = \sqrt{25 - x^2}$ El intervalo de valores que puede tomar la x es desde -5 hasta +5, es decir, puede tomar valores mayores o iguales que -5 y menores o iguales que +5. Si se da un valor menor a -5 (por ejemplo -6) $y = \sqrt{25 - (-6)^2} = \sqrt{25 - 36} = \sqrt{-9}$ La raíz se hace negativa y no se puede calcular el valor. O también si se toma un valor mayor a 5 $y = \sqrt{25 - (6)^2} = \sqrt{25 - 36} = \sqrt{-9}$	$x^2 = 25 - y^2$ $x = \sqrt{25 - y^2}$ El intervalo de valores que puede tomar la y es desde -5 hasta +5, es decir, puede tomar valores mayores o iguales que -5 y menores o iguales que +5. Si se da un valor menor a -5 (por ejemplo -6) $x = \sqrt{25 - (-6)^2} = \sqrt{25 - 36} = \sqrt{-9}$ La raíz se hace negativa y no se puede calcular el valor. O también si se toma un valor mayor a 5 $x = \sqrt{25 - (6)^2} = \sqrt{25 - 36} = \sqrt{-9}$

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, coméntalas con tus compañeros en clase y escucha las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. En tu cuaderno realiza los siguientes ejercicios. Encuentra las intersecciones con los ejes *x* y *y* para las siguientes ecuaciones

a) $6x - 3y - 12 = 0$ $x =$ $y =$	b) $4x + 2y - 16 = 0$ $x =$ $y =$
c) $2x^2 - 9y - 72 = 0$ $x =$ $y =$	d) $3x^2 + 15y - 75 = 0$ $x =$ $y =$

2. En tu cuaderno, verifica si las siguientes funciones son simétricas con respecto al eje *x*, al eje *y* o con respecto al origen, contestando en la línea si es o no simétrica.

a) $y^2 = 5x$ ¿Es simétrica con respecto a *x*? _____ ¿Es simétrica con respecto a *y*? _____ ¿Es simétrica con respecto al origen? _______________	b) $x^2 + y^2 = 15$ ¿Es simétrica con respecto a *x*?_____ ¿Es simétrica con respecto a *y*?_____ ¿Es simétrica con respecto al origen? _______________
c) $2x + 3y = 10$ ¿Es simétrica con respecto a *x*?_____ ¿Es simétrica con respecto a *y*?_____ ¿Es simétrica con respecto al origen? _______________	d) $2x^2 + 4y^2 = 16$ ¿Es simétrica con respecto a *x*?_____ ¿Es simétrica con respecto a *y*?_____ ¿Es simétrica con respecto al origen? _______________

3. En tu cuaderno, determina la extensión de las variables en las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 6y$ Extensión de x: ____________________ Extensión de y: ____________________	b) $y^2 = -8x$ Extensión de x: ____________________ Extensión de y: ____________________
c) $x^2 - y^2 = 16$ Extensión de x: ____________________ Extensión de y: ____________________	d) $y^2 - x^2 = 25$ Extensión de x: ____________________ Extensión de y: ____________________

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si calculas la intersección, la simetría y la extensión de una gráfica.*
Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Observa detenidamente los objetos que hay en tu casa y menciona al menos dos ejemplos en donde se observe el principio de simetría.

____

____

____

____

Cierre de bloque I

Reflexiona sobre lo aprendido

En este bloque hemos revisado que un plano cartesiano es de gran utilidad para localizar gráficamente pares ordenados y gráficas de funciones, las cuales ayudan a tener una mejor comprensión de las expresiones algebraicas y se conforman por dos ejes: el horizontal x y el vertical y.

También conocimos lo que es un lugar geométrico, es decir, donde el conjunto de los puntos (x,y) cumplen con una misma propiedad o condición geométrica, y se representa por una ecuación. Además, te diste cuenta de que si observas detenidamente las ecuaciones, podrás determinar qué lugar geométrico representa, entonces:

Cuando una ecuación contiene variables elevadas a la potencia 1, el lugar geométrico que representa es una recta.	Cuando una ecuación contiene una variable elevada a la potencia 2 y las otras no, el lugar geométrico que representa es una parábola.	En las ecuaciones donde ambas variables están elevadas al cuadrado y tienen los mismos coeficientes numéricos, el lugar geométrico que representa es una circunferencia.	Para las ecuaciones en las que ambas variables están elevadas al cuadrado los coeficientes numéricos son diferentes; por lo tanto, el lugar geométrico que representa es una elipse.

Se llaman *intersección con los ejes* a los puntos (si es que existen) donde la gráfica de una ecuación pasa por los ejes.

Y recuerda, cuando se va a realizar la gráfica de una ecuación, es conveniente determinar:

- Las intersecciones de la gráfica con los ejes del sistema de coordenadas.
- La simetría que tiene la ecuación.
- La extensión de las variables de la ecuación.

Evaluación del bloque I

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque I.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Identificas la extensión de una gráfica.				
	Identificas la intersección de los ejes.				
	Identificas la simetría de los ejes.				
	Identificas los elementos de un lugar geomé-trico.				

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Utilizas los conceptos de lugar geométrico en una tabla o gráfica para determinar su representación.				
	Interpretas y calculas la intersección con los ejes coordenados para observar dónde cruza la gráfica.				
	Calculas la simetría de una gráfica con res-pecto a los ejes horizontal y vertical.				
	Calculas la extensión de una gráfica.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

____
____
____
____
____

2. ¿Cómo puedes utilizar lo aprendido en el presente y futuro?

____
____
____

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

____
____
____

Recuerda que deberás integrar las respuestas a tu portafolio de evidencias, y anotar número de bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque I

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollado)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias Genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone maneras de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

BLOQUE II

Aplicas las propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos

Bloque II

12 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. Segmento rectilíneo
   a) Distancia entre dos puntos
   b) Perímetro y áreas de polígonos
2. Razón de un segmento de recta
3. Punto medio de un segmento de recta

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: Ejercicios de cálculo de longitud de segmentos de recta.
- Actividad 2: Ejercicios de cálculo de razón de un segmento de recta.
- Actividad 3: Ejercicios de cálculo de punto medio de un segmento de recta.

La resolución de los ejercicios formará parte del portafolio de evidencias.

Importante. A partir de este bloque realizarás en tu cuaderno cuadriculado, los ejercicios en donde implique graficar.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás un total de tres productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.
- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje.

Bloque II

Aplicas las propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos

Introducción

En el bloque anterior estudiamos el plano cartesiano, sus características y la representación de coordenadas rectangulares, con lo cual obtuvimos la correspondencia entre puntos y números reales.

Mediante el plano nos apoyamos para reconocer diferentes lugares geométricos, y lo comprobamos a través de su simetría, su extensión y las intersecciones con los ejes coordenados.

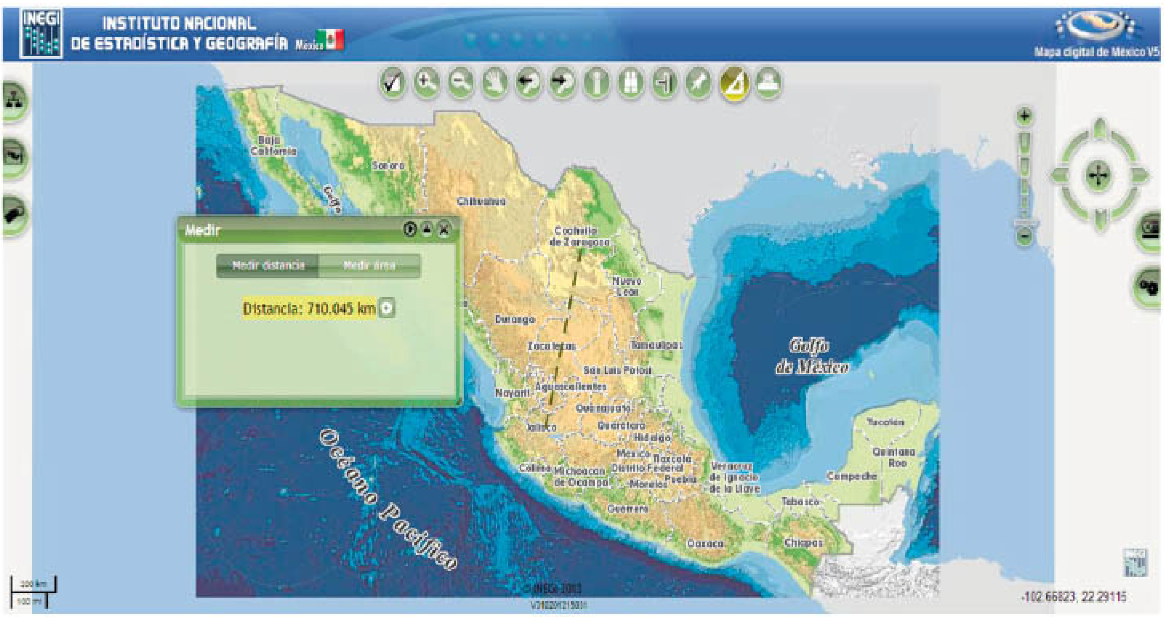
En este bloque veremos la noción de distancia entre dos puntos, mediante ejercicios contextualizados, primero en el plano cartesiano, para después resolver situaciones en mapas, dibujos, etcétera.

También estudiaremos el concepto de razón, como un criterio para dividir un segmento rectilíneo en varias partes.

Y cerraremos el bloque II apoyándonos en los conceptos de distancia entre dos puntos para resolver áreas de varios polígonos regulares, tales como triángulos y cuadriláteros.

¿Con qué propósito?

Exploras las posibilidades analíticas para realizar medidas, construir e interpretar modelos relacionados con segmentos rectilíneos y polígonos.



Para iniciar, reflexiona

Estás en la ciudad de México y quieres ir a Guadalajara. Tienes un mapa a escala y quieres saber la distancia que existe entre ambas ciudades. ¿Cómo harías para resolver esta situación? Comenta tu respuesta de manera clara y sencilla.

____

____

____

____

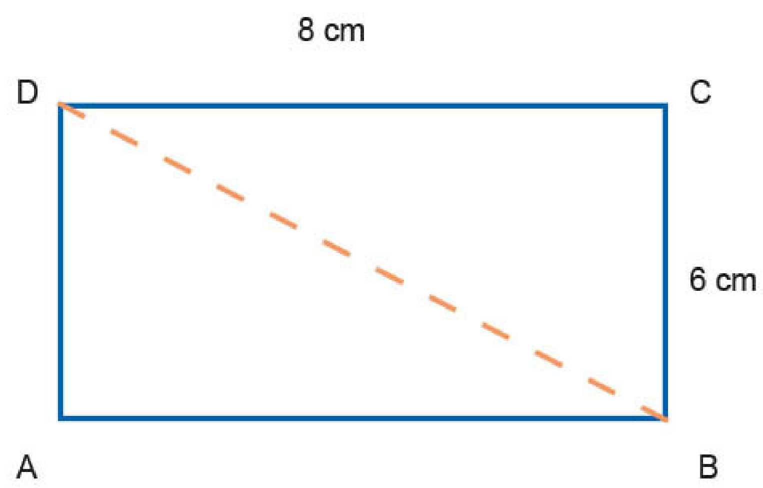
¿Con qué conocimientos cuento?

Has llegado al segundo bloque de matemáticas III, y para comprender este tema es conveniente que revises tus aprendizajes.

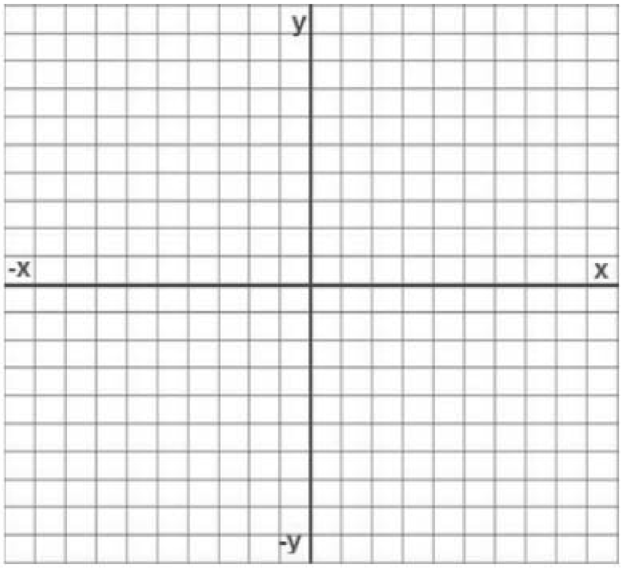
Evaluación diagnóstica.

Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones de los incisos que se muestran enseguida y elabora en tu libreta o cuaderno lo que se te pide.

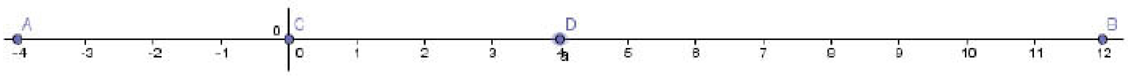
1. Encuentra la longitud de la diagonal ($\overline{BD}$) del rectángulo de la siguiente figura.



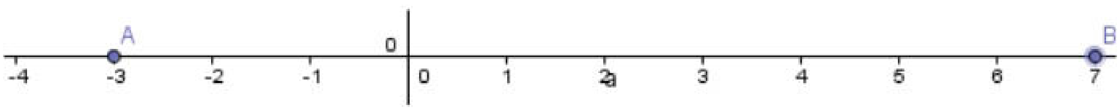
2. Ubica en el plano cartesiano el polígono representado por los puntos A(4,-2), B(2,0), C(-3,1) y D(-5,-4) y calcula su perímetro.



3. ¿Qué razón existe entre la longitud del segmento $\overline{AC}$ y el segmento $\overline{CB}$? ¿Y entre el segmento $\overline{CD}$ y el $\overline{DB}$?



4. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento de recta ($\overline{AB}$)?



5. Divide al segmento ($\overline{AB}$) en tres partes, de tal manera que la longitud de una de ellas sea el doble de la otra y el triple de la otra.

Al concluir, verifica tus respuestas en la sección de *Retroalimentación* al final del libro. Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 4 a 5 preguntas considera tu resultado como Bueno, 3 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 3 considera tu desempeño como No suficiente, lo cual exige que refuerces tus conocimientos previos.

¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos abordando los siguientes conceptos: *distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento y razón de un segmento de recta*, que se presentan en este bloque.

Aprende más

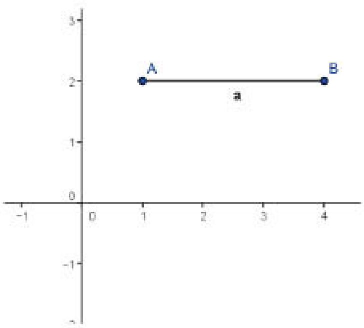
Segmento rectilíneo

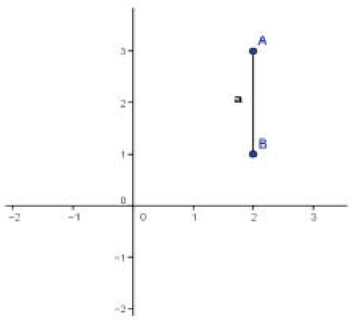
Uno de los conceptos más utilizados en la geometría analítica es el segmento de recta, que es la distancia comprendida entre dos puntos A y B, representada como $\overline{AB}$.

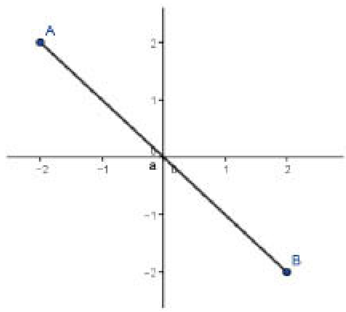
$\overline{AB}$

Tipos de segmentos de recta

- **Horizontal** Si es paralelo al eje *x* o está sobre él.
- **Vertical** Si es paralelo al eje *y* o está sobre él.
- **Inclinado** Si no está sobre ningún eje o no es paralelo.

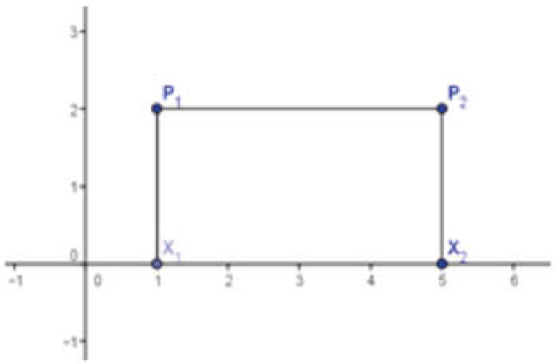


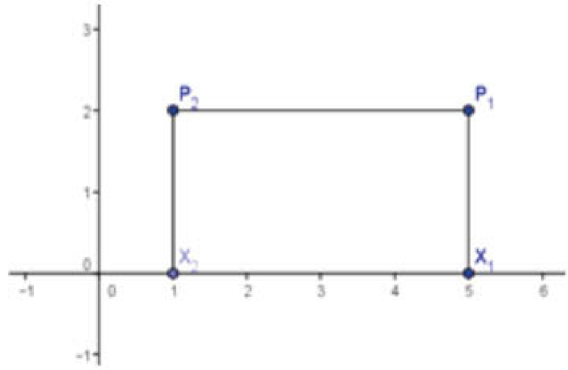




En algunas ocasiones no se indica el sentido del segmento de recta, y a este segmento se les considera como no dirigido. Por el contrario, cuando tiene su dirección bien definida, se considera como un segmento de recta dirigido, donde hay que tomar en cuenta lo siguiente:

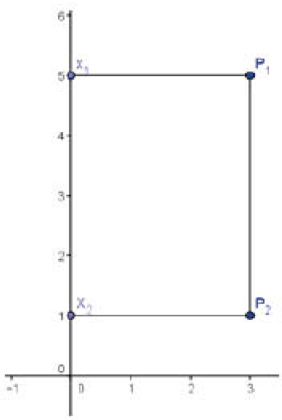
- Si el segmento de recta es horizontal, la longitud se medirá restando el punto de la izquierda de la abscisa menos el punto de la derecha de la abscisa.

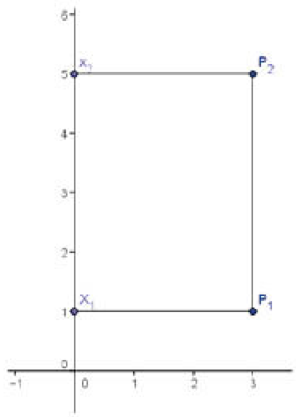




En este ejemplo, al punto P_1, que se se encuentra en 1, se le restaría el punto punto P_2, que se ubica en 5, dando como resultado -4.
$P_1 - P_2 = 1 - 5 = -4$

En este ejemplo, al punto P_2, que encuentra en 1, se le restaría el punto P_1, que se ubica en 5, dando como resultado -4.
$P_2 - P_1 = 1 - 5 = -4$





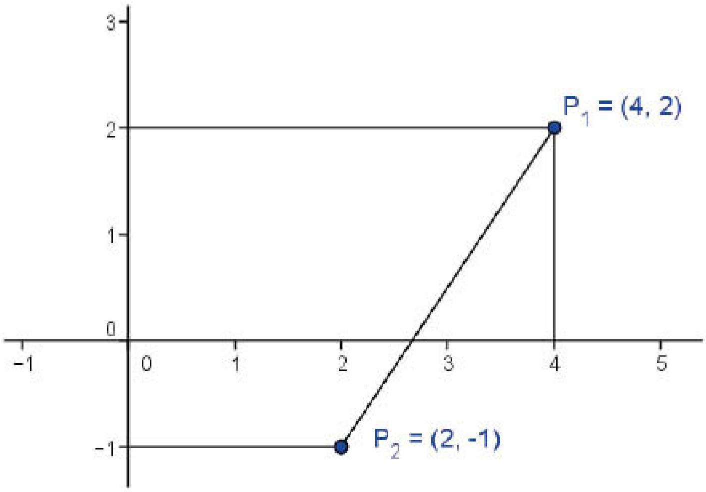
En este ejemplo, al punto P_1, que se se encuentra en 5, se le restaría el punto punto P_2, que se ubica en 1, dando como resultado 4.
$P_1 - P_2 = 5 - 1 = 4$

En este ejemplo, al punto P_2, que encuentra en 5, se le restaría el punto P_1, que se ubica en 1, dando como resultado 4.
$P_2 - P_1 = 5 - 1 = 4$

Entonces, la magnitud de un segmento de recta sin importar su dirección está dada por:

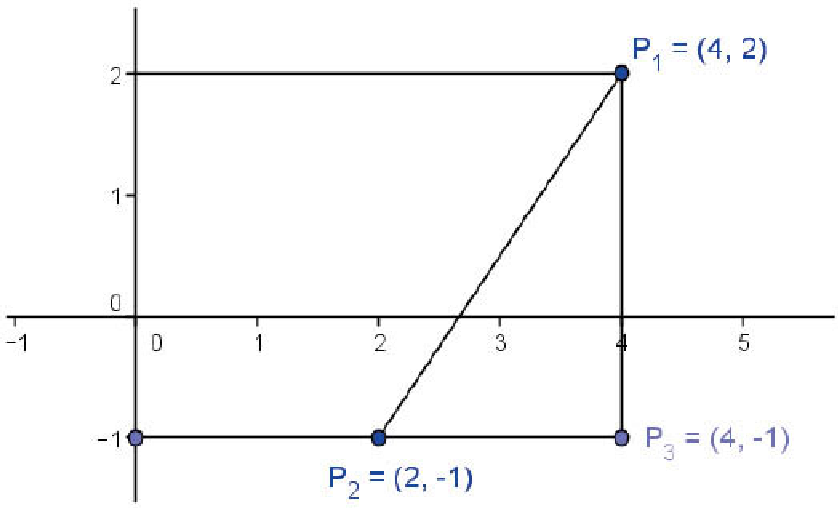
- $\overline{P_1P_2} = |x_2 - x_1|$ si se trata de un segmento horizontal, donde | | significa valor absoluto, es decir, el valor positivo de la diferencia entre los dos puntos.
- $\overline{P_1P_2} = |y_2 - y_1|$ si se trata de un segmento vertical.

Para un segmento de recta inclinado como el siguiente ejemplo veremos cómo se calcula la distancia entre dos puntos P_1 y P_2 dados:



Las coordenadas de los puntos extremos P_1 y P_2 de la figura están dadas por $P_1(4,2)$ y $P_2(2,-1)$.

Si formamos un triángulo rectángulo tomando el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ como la hipotenusa y el punto 3 con coordenadas $P_3(4,-1)$ como el tercer vértice del triángulo tenemos:



Recordando el teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$

La longitud del segmento de recta $\overline{P_2P_3}$ es un segmento horizontal, por lo que se calcula con:

$$\overline{P_2P_3} = |x_2 - x_1| = |4 - 2| = 2$$

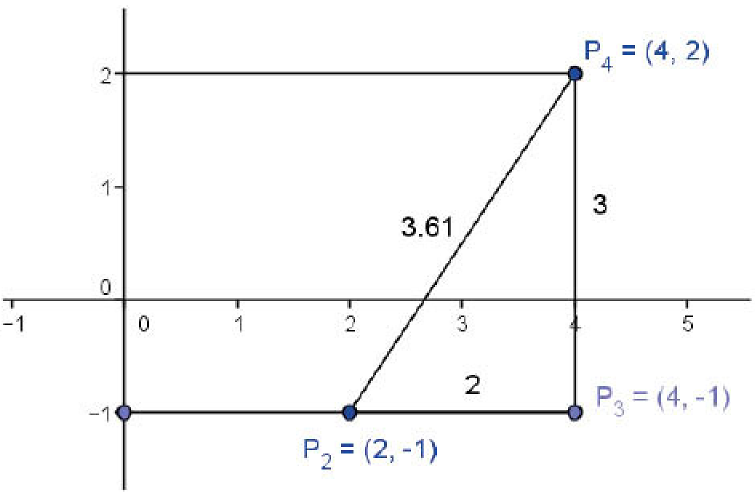
La longitud del segmento de recta $\overline{P_1P_3}$ es un segmento vertical, por lo que se calcula con:

$$\overline{P_1P_3} = |y_2 - y_1| = |2 - (-1)| = |2 + 1| = 3$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del teorema de Pitágoras:

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_2P_3})^2 + (\overline{P_1P_3})^2$$
$$(\overline{P_1P_2})^2 = (2)^2 + (3)^2$$
$$(\overline{P_1P_2})^2 = 4 + 9$$
$$(\overline{P_1P_2})^2 = 13$$
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{13}$$
$$\overline{P_1P_2} = 3.61$$

Por lo tanto, la longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ es de 3.6 unidades.



Del anterior ejemplo podemos deducir que:

Distancia entre dos puntos

La distancia $\overline{P_1P_2}$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ está dada por la fórmula:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

O también podemos invertir el orden de los puntos de las coordenadas (x,y)

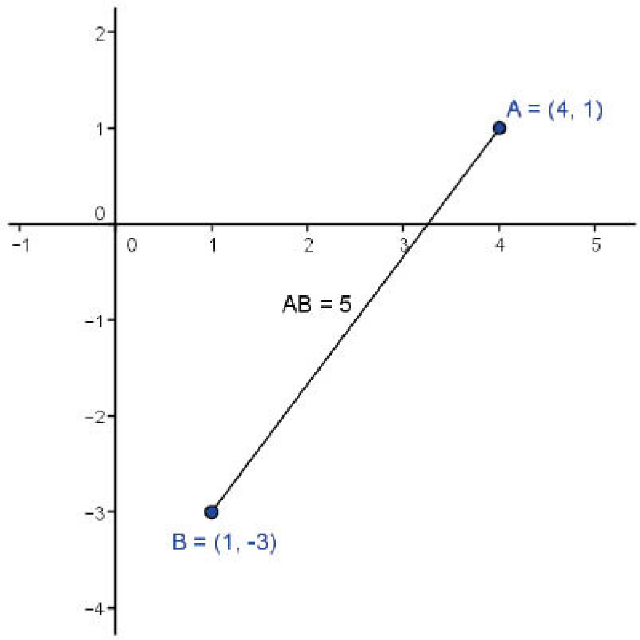
$$\overline{P_2P_1} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

En el siguiente ejemplo, calcula la distancia entre los puntos A(4,1) y B(1,-3)
$A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$

Tomando el punto A como el punto $P_1(x_1,y_1)$ y el punto B como el punto $P_2(x_2,y_2)$ y sustituyendo estos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-\ 4)^2 + (-3-1)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{9+16}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{25}$$
$$\mathbf{\overline{AB} = 5}$$

Gráficamente, tenemos:



Si hubiésemos tomado el punto A como el punto $P_2(x_2,y_2)$ y el punto B como el punto $P_1(x_1,y_1)$ y sustituyendo estos valores en la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-\ 1)^2 + (-1-3)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{9+16}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{25}$$
$$\mathbf{\overline{AB} = 5}$$

Recuerda que el *perímetro (*del griego *peri* “alrededor”- y *metro* “medida”*)* de un polígono o cualquier figura, es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica, es decir, la longitud del contorno de la figura.

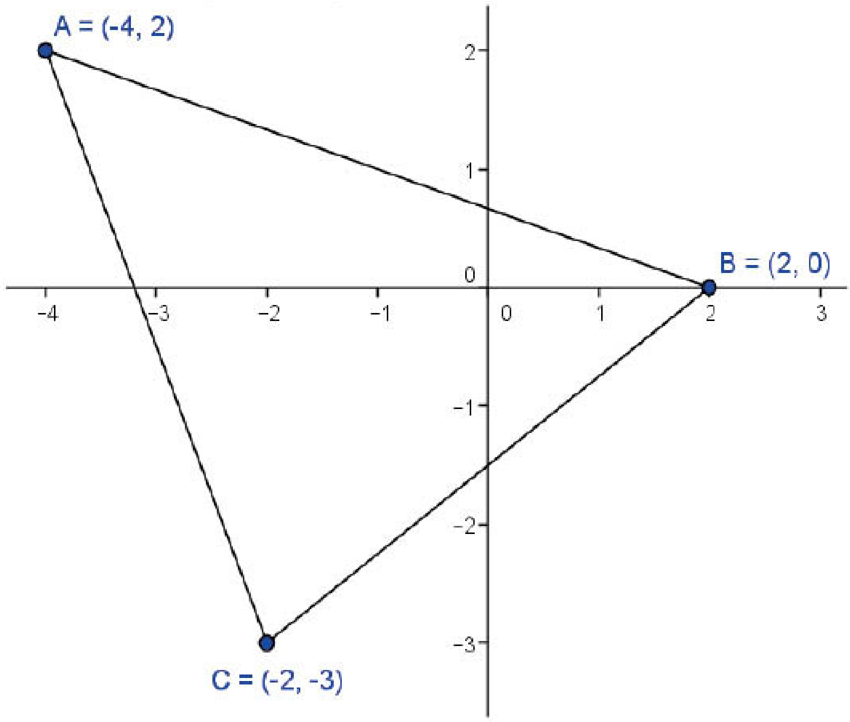
Sabías que…

Hacia el año 250 a.C., el matemático y filósofo Eratóstenes de Alejandría hizo la primera medición del perímetro de la Tierra, con una exactitud asombrosa y un margen de error muy pequeño. Empleando un método trigonométrico, midió la sombra en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía y comparó la distancia entre las ciudades de Siena y Alejandría, haciendo el equivalente a 5000 estadios (cuya longitud era de 184.8 m) y deduciendo así la circunferencia de la Tierra en 252,000 estadios.

En Grecia se utilizaba el término *estadio* como una unidad de longitud, que tomaba como patrón la longitud del estadio de Olimpia.

Para calcular el perímetro de un polígono, podemos encontrar la distancia entre dos de sus vértices y, después, sumar cada uno de los segmentos, como veremos en los siguientes ejemplos:

Calcula el perímetro de la siguiente figura:



Solución:

Se calcula primero la distancia de los 3 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-(-4))^2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{4 + 36}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{40}$

$\overline{\mathbf{AB}}$ **= 6.32**

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-2)^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{9 + 16}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{25}$

$\overline{\mathbf{BC}}$ **= 5**

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2-(-4))^2}$

segmentos,

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2}$

manera:

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{25 + 4}$

$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{29}$

Una vez calculada la longitud de los 3

el perímetro se obtiene de la siguiente

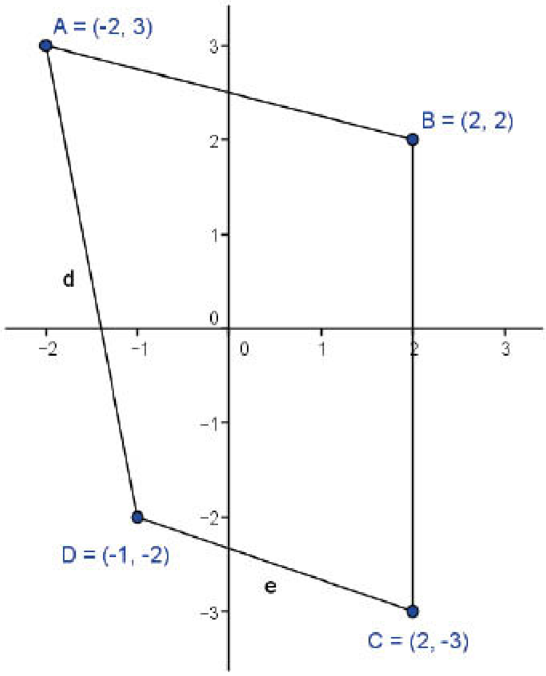
P = $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CD}}$ = 6.32 + 5 + 5.86

P = 17.18

El perímetro es igual a 17.18 unidades

$\overline{\mathbf{CD}}$ **= 5.86**

Otro ejemplo: calcula el perímetro de la siguiente figura.



Solución:
Se calcula primero la distancia de los 3 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$

$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-3)^2}$
$\overline{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2}$
$\overline{AB} = \sqrt{16+1}$
$\overline{AB} = \sqrt{17}$
$\overline{AB} = 4.12$

$\overline{BC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-2)^2}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2}$
$\overline{BC} = \sqrt{25+0}$
$\overline{BC} = \sqrt{25}$
$\overline{BC} = 5$

$\overline{CD} = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (2-(-1))^2}$
$\overline{CD} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$
$\overline{CD} = \sqrt{1+9}$
$\overline{CD} = \sqrt{10}$
$\overline{CD} = 3.16$

$\overline{DA} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-1-(-2))^2}$
$\overline{DA} = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2}$
$\overline{DA} = 1$
$\overline{DA} = \sqrt{26}$
$\overline{DA} = 5.10$

Una vez calculada la longitud de los cuatro segmentos, el perímetro se obtiene de la siguiente manera:

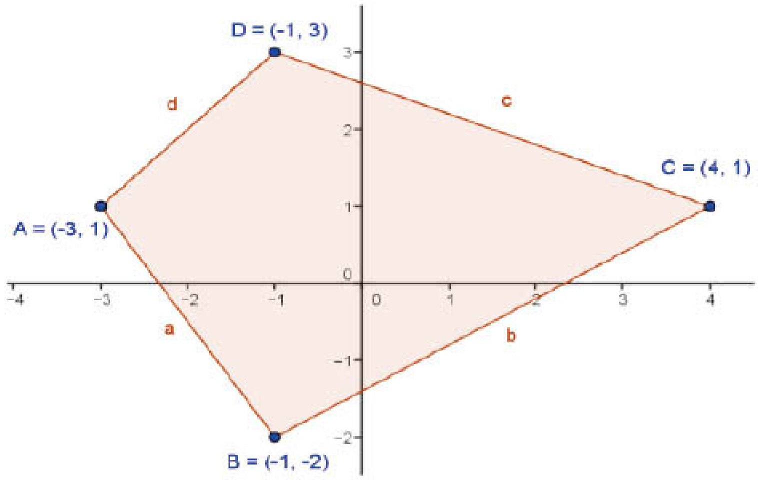
$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 4.12 + 5 + 3.16 + 5.10$
$P = 17.38$ El perímetro es igual a 17.38 unidades

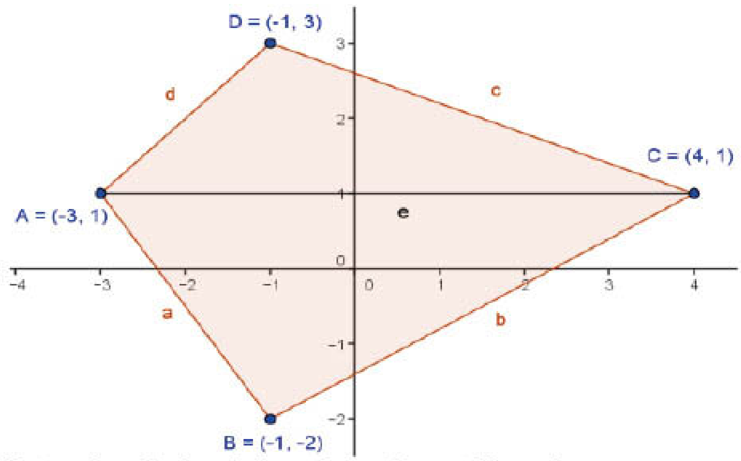
Ahora revisemos lo que es el *área* de un polígono, que se refiere a la cantidad de superficie que se encuentra dentro de una figura.

Apliquemos el concepto: calcula el área del siguiente paralelogramo, dividiéndolo en dos triángulos y sumando sus áreas, que se pueden obtener utilizando la fórmula de Herón, que dice $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es el semiperímetro, que se calcula mediante la fórmula $s = \frac{a+b+c}{2}$, siendo *a, b, c* y *d* las longitudes de cada uno de los lados del triángulo.

Solución:

Se divide primero el polígono en dos triángulos.





Se calculan las distancias de los lados de ambos triángulos, denotados con *a, b, c, d, e*.

$\bar{a} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-(-3))^2}$

$\bar{a} = \sqrt{(-3)^2 + (-1+3)^2}$

$\bar{\mathbf{a}}$ **= 3.6**

$\bar{b} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-4)^2}$

$\bar{b} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}$

$\bar{b} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\bar{\mathbf{b}}$ **= 5.8**

$\bar{c} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-4)^2}$

$\bar{c} = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2}$

$\bar{c} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$\bar{\mathbf{c}}$ **= 5.4**

$\bar{d} = \sqrt{(1-3)^2 + (-3-(-1))^2}$

$\bar{d} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$

$\bar{d} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\bar{\mathbf{d}}$ **= 2.8**

$\bar{e} = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-4)^2}$

$\bar{e} = \sqrt{(0)^2 + (-7)^2}$

$\bar{e} = \sqrt{0+49} = \sqrt{49}$

$\bar{\mathbf{e}}$ **= 7**

Se calcula s_1 para el triángulo superior (*d-c-e*)

$s_1 = \frac{d+c+e}{2} = \frac{2.8+5.4+7}{2} = \frac{15.2}{2}$ $\quad$ $\boldsymbol{s_1 = 7.6}$

y luego su área con la fórmula:

$A_1 = \sqrt{s(s-d)(s-c)(s-e)}$

$A_1 = \sqrt{7.6(7.6-2.8)(7.6-5.4)(7.6-7)}$

$\boldsymbol{A_1 = 6.9\ u^2}$

Se calcula s_2 para el triángulo inferior (*a-b-e*)

$s_2 = \frac{a+b+e}{2} = \frac{3.6+5.8+7}{2} = \frac{16.4}{2}$ $\quad$ $\boldsymbol{s_2 = 8.2}$

y luego su área con la fórmula:

$A_2 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$

$A_2 = \sqrt{8.2(8.2-3.6)(8.2-5.8)(8.2-7)}$

$\boldsymbol{A_1 = 10.\ 4\ u^2}$

Se suman ahora las áreas A_1 y A_2

$A_t = A_1 + A_2 = 6.9\ u^2 + 10.4\ u^2$

$\boldsymbol{A_t = 17.3\ u^2}$

Por lo que el área del polígono es 17.3 u^2

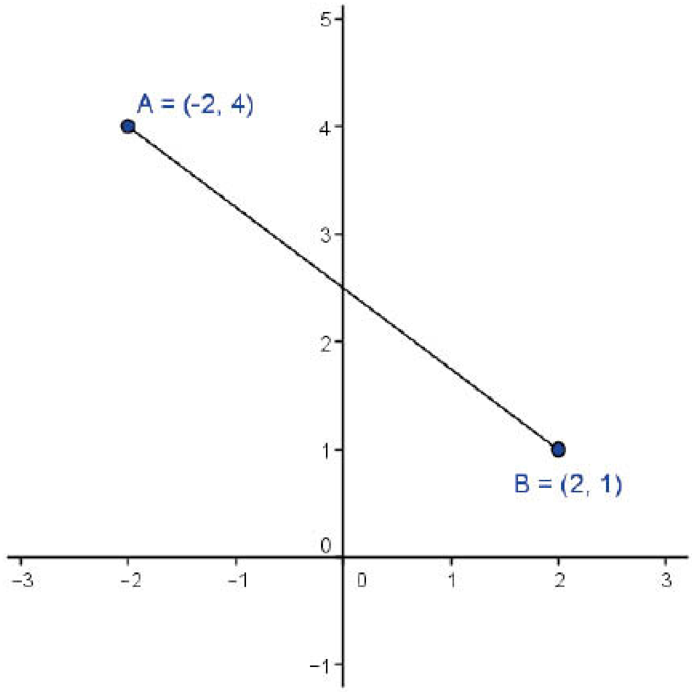
Aplica lo aprendido

Actividad 1

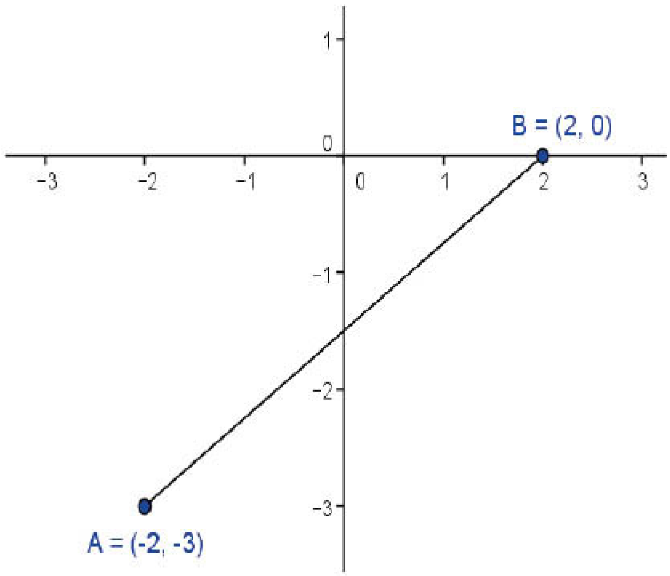
Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

En los ejercicios 1 a 4, calcula la longitud de segmento de la recta ($\overline{AB}$) en las siguientes figuras.

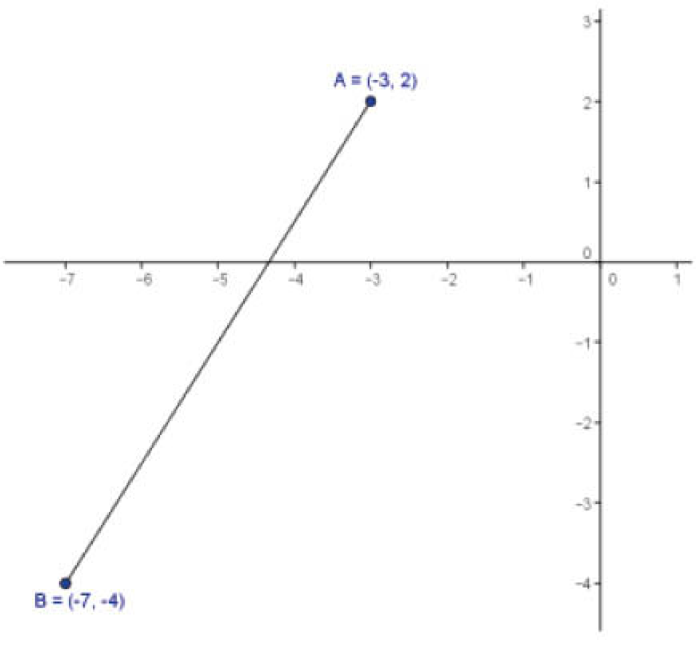
1.



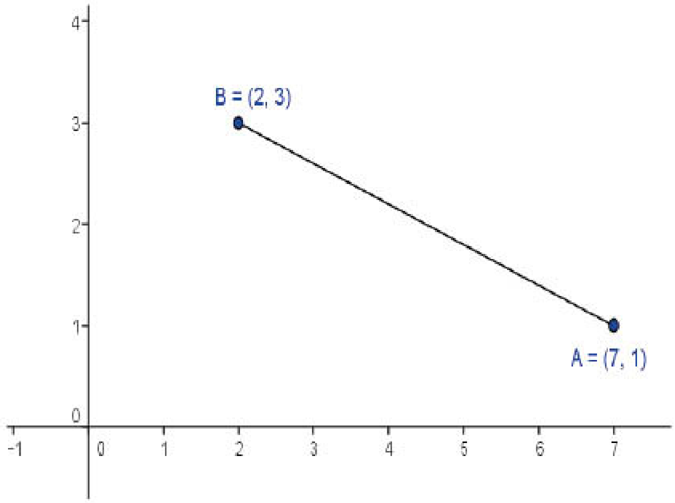
2.



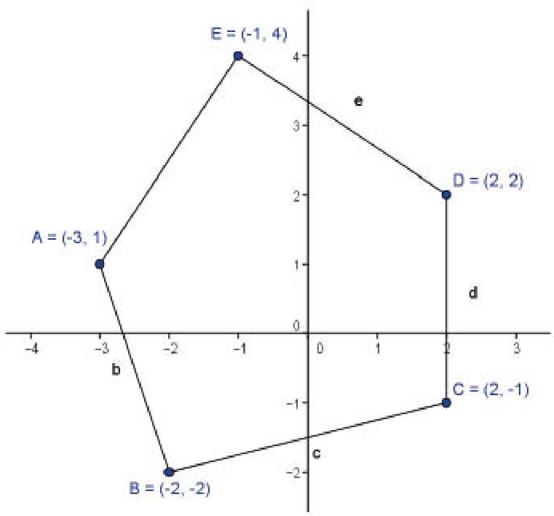
3.



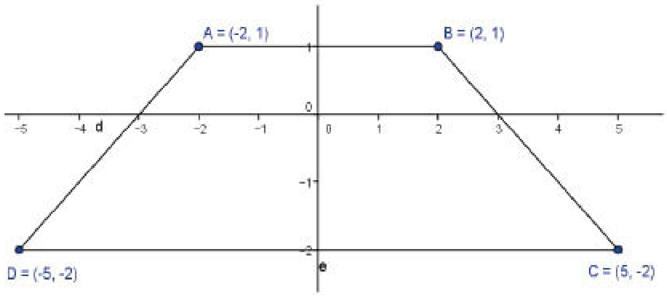
4.



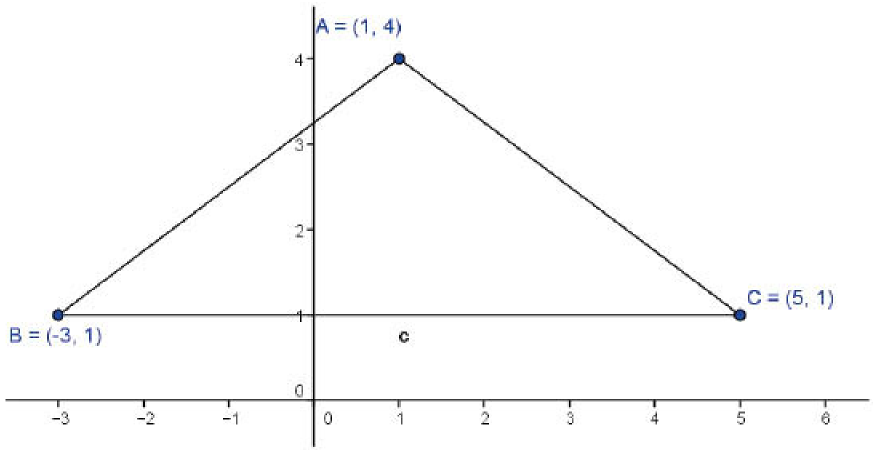
5. Calcula el perímetro de la siguiente figura:



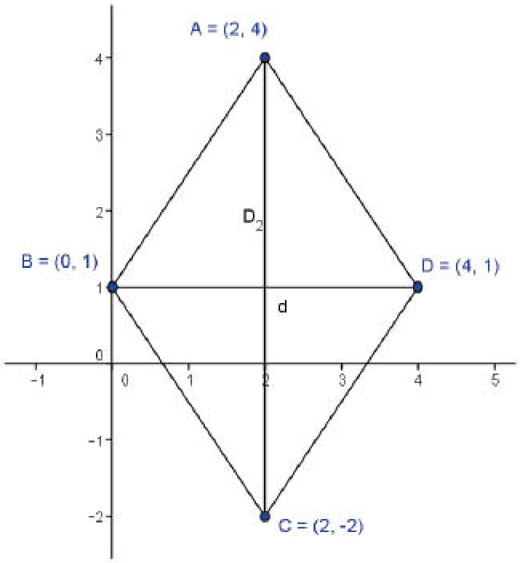
6. Calcula el perímetro de la siguiente figura:



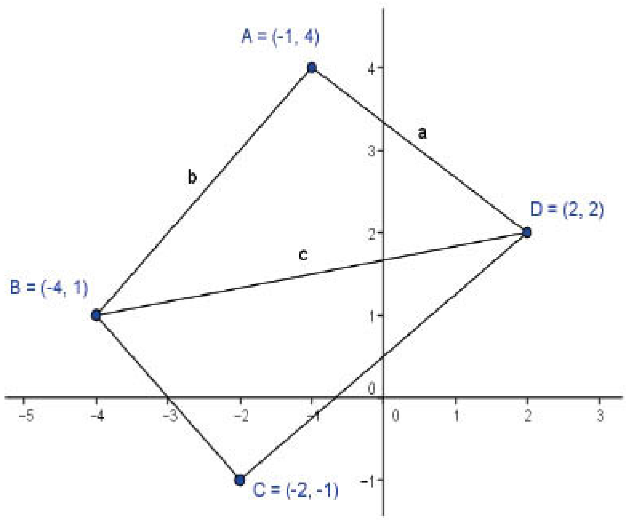
7. Demuestra que los vértices A(1,4), B(-3,1) y C(5,1) de la siguiente figura pertenecen a un triángulo isósceles.



8. Calcula el área del siguiente rombo, recordando que su fórmula es $A = \frac{dD}{2}$ donde *d* es la diagonal menor y *D* es la diagonal mayor.



9. Calcula el área del siguiente paralelogramo, dividiéndolo en dos triángulos y sumando sus áreas, que se pueden obtener utilizando la fórmula de Herón, que dice $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde *s* es el semiperímetro, que se calcula mediante la fórmula $s = \frac{(a+b+c)}{2}$, siendo *a*, *b* y *c* las longitudes de cada uno de los lados del triángulo.



Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si utilizas el concepto de segmento de recta. Y si eres capaz de calcular el perímetro y área de polígonos.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si observas las distancias que recorres diariamente, te percatarás de que siempre tiene un punto de inicio y un punto final. Explica brevemente cómo calcularías la distancia que hay de tu casa a la escuela, si fueras en línea recta.

____

Ahora define con tus palabras qué es la longitud de un segmento de recta:

____

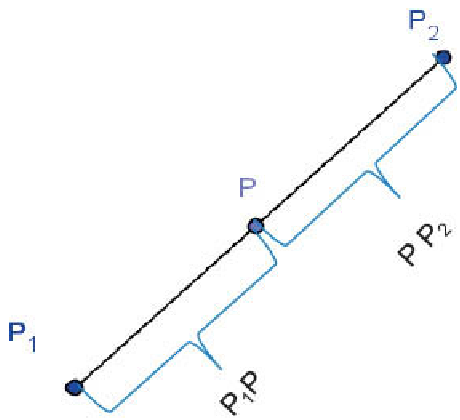
Aprende más

Razón de un segmento de recta

El punto P(*x*,*y*) que divide a un segmento de recta en una razón dada se llama *punto de división*, y se calcula con la fórmula:

$$r = \frac{P_1P}{PP_2}$$

Si tenemos un segmento de recta y por el pasan dos puntos P_1 y P_2, y se traza también un punto P, éste divide al segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ en la razón *r*, como se presenta en la siguiente figura.



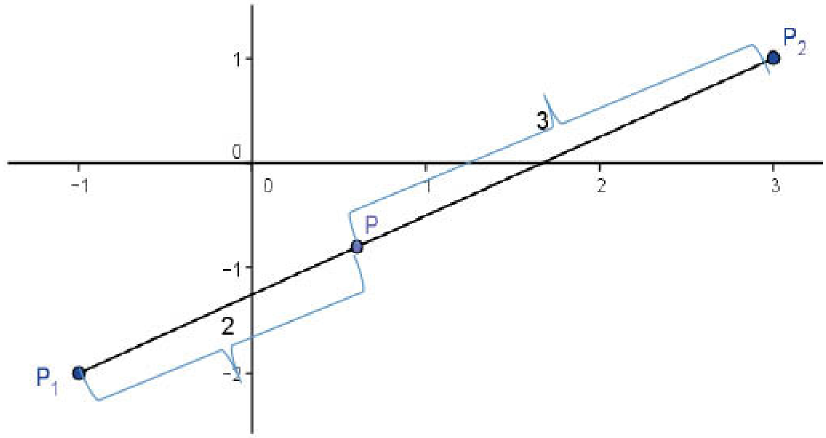
Si se establece la distancia P_1P_2 como positiva y *el punto P está entre los puntos P_1 y P_2,* las distancias P_1P y PP_2 serán positivas y también *la razón será positiva.*

Si el *punto P* está *fuera de los puntos P_1 y P_2*, una de las distancias $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ será negativa, por lo que *la razón r será negativa*.

"Donde no hay orden, hay caos".
-Fray Luca Pacioli

Veamos los siguientes ejemplos:

El segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ tiene una longitud de 5, el segmento de recta $\overline{P_1P}$ tiene una longitud de 2 y la distancia del segmento $\overline{PP_2}$ es igual a 3. Calcula la razón.

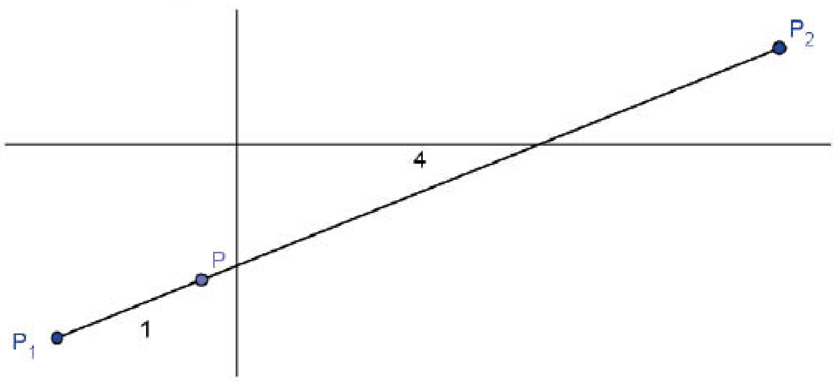


Solución

Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$

Y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos una razón positiva, es decir: $\mathbf{r = \frac{2}{3}}$. Podemos observar que como el punto P está entre los puntos P_1 y P_2 la razón r es positiva.

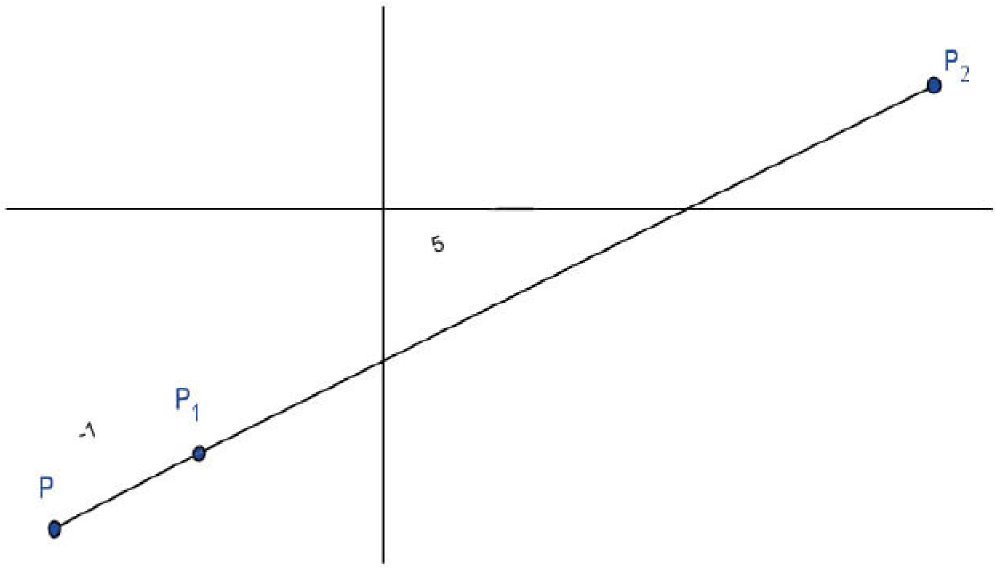
Calcula la razón en el siguiente caso:



Solución

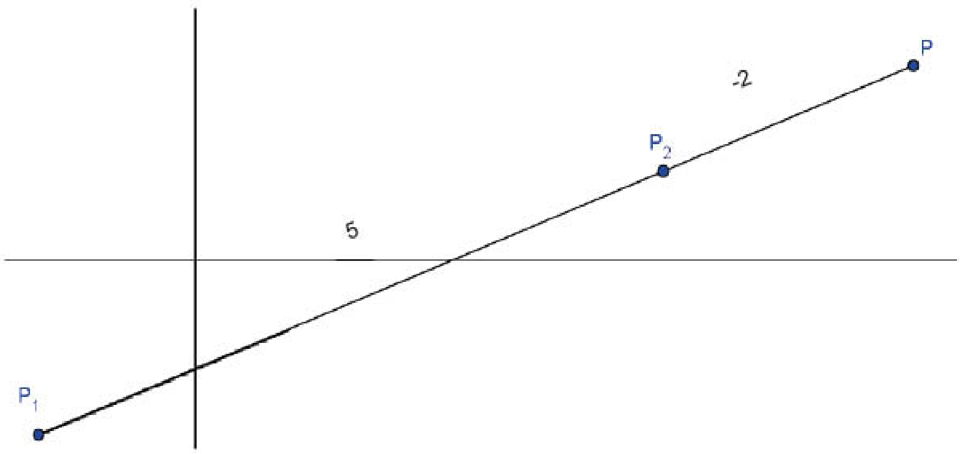
Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos: $\mathbf{r = \frac{1}{4}}$

Calcula la razón para los siguientes casos:



Solución

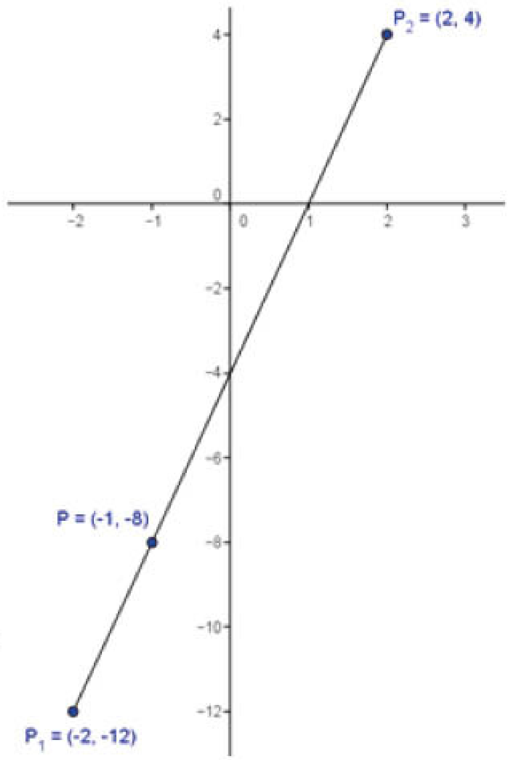
En este caso, el punto P está *fuera del segmento* $\overline{P_1P_2}$, y el segmento $\overline{PP_1}$ es *negativo*. Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos: $\boldsymbol{r = \frac{-1}{6}}$



Solución

En este caso el punto P está fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$, y el segmento $\overline{PP_2}$ es negativo. Utilizando la fórmula para calcular la razón $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ y sustituyendo los valores de las distancias de los segmentos, tenemos: $\boldsymbol{r = \frac{7}{-2}}$

Indica la razón en la que el punto P(-1,-8) divide al segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos puntos extremos son $P_1(-2,-12)$ y $P_2(2,4)$



Solución:

Se calcula la distancia entre los puntos P_1 y P:

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-12-(-8))^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-12+8))^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{1+16}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{17}$

Ahora se calcula la distancia entre P y P_2:

$\overline{PP_2} = \sqrt{(-8-4)^2 + (-1-2)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(-12)^2 + (-3)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{144+9}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{153} = \sqrt{9(17)}$

Utilizando la fórmula $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ se sustituyen estos valores:

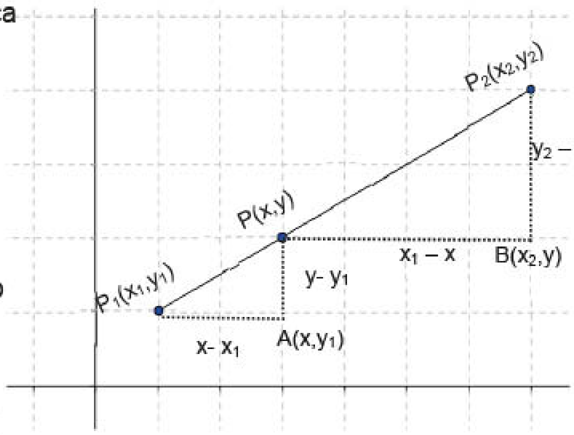
$r = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{9(17)}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{9}\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\mathbf{r = \frac{1}{3}}$

Si un punto P(x,y) es un punto que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$, cuyos extremos tienen coordenadas $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en una razón r dada, entonces, para calcular las coordenadas del punto P utilizaremos las siguientes fórmulas:

Coordenadas del punto $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ $\qquad$ Coordenadas del punto $y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$

Tomando en cuenta el teorema de Tales acerca de triángulos semejantes:

$\frac{P_1A}{PB} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{P_1P}{PP_2} = r \qquad \frac{AP}{BP_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{P_1P}{PP_2} = r$



Tomando $\frac{x-x_1}{x_2-x} = r$ para despejar x tenemos:

$x - x_1 = r(x_2 - x)$ Multiplicando el lado derecho

$x - x_1 = rx_2 - rx$ Pasando las x del lado izquierdo y las x_1 del lado derecho.

$x + rx = rx_2 + x_1$ Factorizando el lado izquierdo.

$x(1 + r) = rx_2 + x_1$ Despejando x de la izquierda.

$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$ De igual manera se calcula para y.

Ejemplo

Sea $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$ los extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$; encuentra las coordenadas del punto $P(x,y)$ que lo divide en una razón $r = \frac{1}{3}$

Solución

Sustituyendo los valores en las fórmulas:

$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$ $\qquad$ $y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$

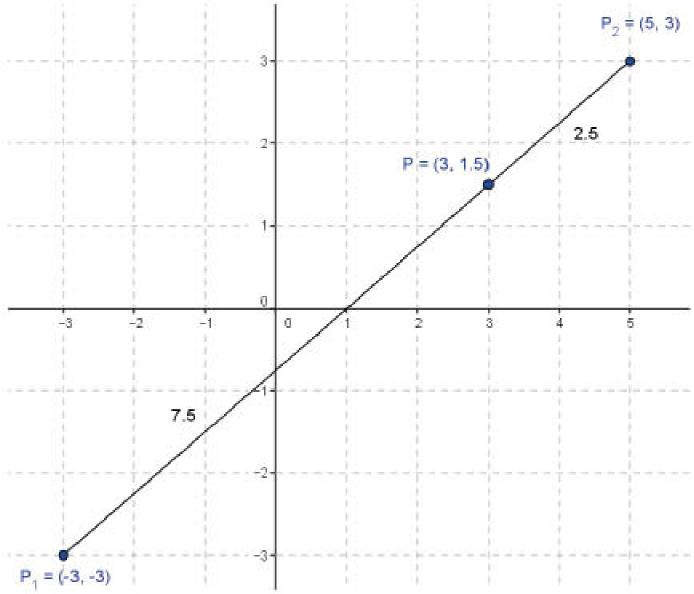
$x = \frac{5 + \left(\frac{1}{3}\right)(-3)}{1 + \frac{1}{3}}$ $\qquad$ $y = \frac{3 + \left(\frac{1}{3}\right)(-3)}{1 + \frac{1}{3}}$

$x = \frac{5-1}{\frac{4}{3}}$ $\qquad$ $y = \frac{3-1}{\frac{4}{3}}$

$x = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{4}{3}}$ $\qquad$ $y = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{4}{3}}$

$x = \frac{12}{3}$ $\qquad$ $y = \frac{6}{4}$

$\boldsymbol{x = 3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{y = 1.5}$



Las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r = \frac{1}{3}$ son P(3,1.5), tal como se muestra en la figura.

Para comprobarlo, calculamos las distancias de los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$:

$\overline{P_1P} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-3-1.5)^2}$
$\overline{P_1P} = \sqrt{(-6)^2 + (-4.5)^2}$
$\overline{P_1P} = \sqrt{36 + 20.25}$
$\overline{P_1P} = \sqrt{56.25}$
$\boldsymbol{\overline{P_1P} = 7.5}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(3-5)^2 + (1.5-3)^2}$
$\overline{PP_2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1.5)^2}$
$\overline{PP_2} = \sqrt{4 + 2.25}$
$\overline{PP_2} = \sqrt{6.25}$
$\boldsymbol{\overline{PP_2} = 2.5}$

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Ahora define con tus palabras qué es la razón de un segmento de recta y para qué nos sirve conocerla.______________________________________

____

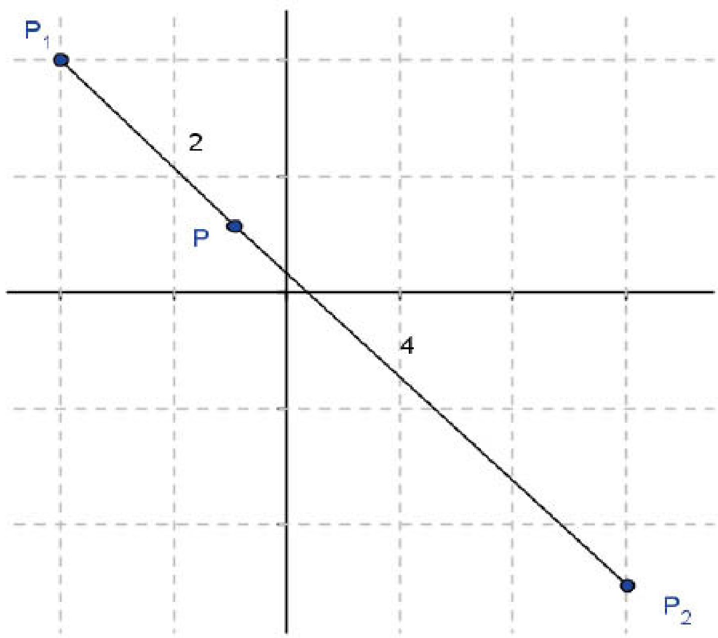
Aplica lo aprendido

Actividad 2

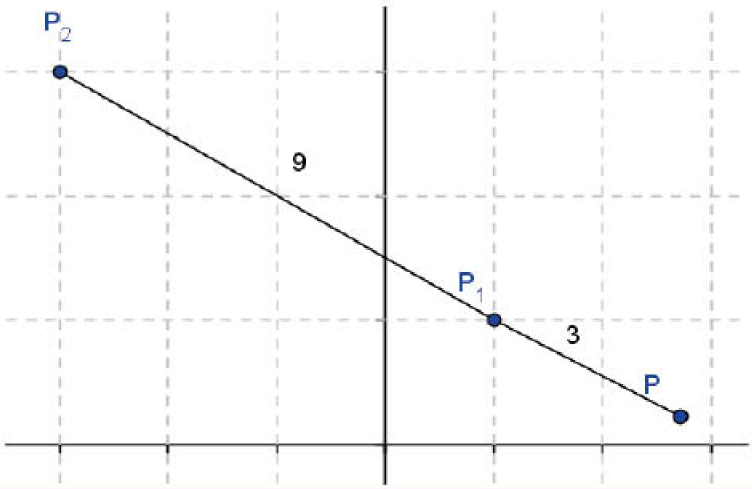
Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

En los ejercicios 1, 2 y 3, encuentra la razón *r* entre los puntos.

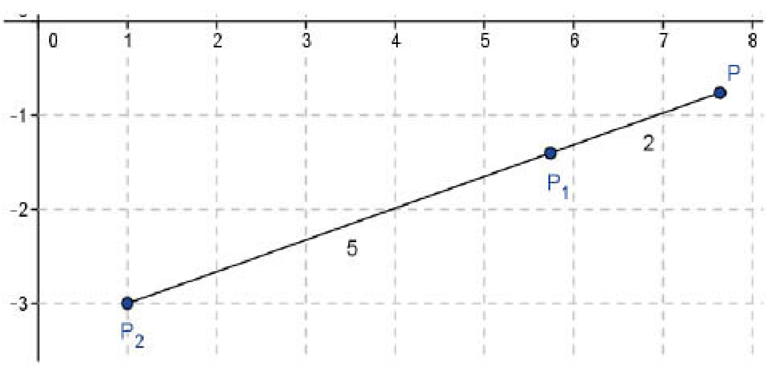
1.



2.

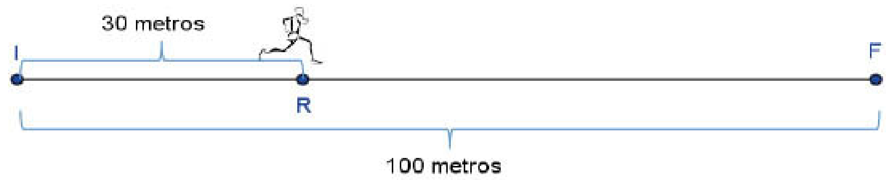


3.



Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

4. En una pista de 100 metros de largo, un corredor sale del punto inicial I y ha recorrido 30 metros (punto R). ¿En qué razón divide R a la pista, si tiene que llegar al punto F?



En los ejercicios del 5 al 8, indica la razón en la que el punto P(x,y) divide al segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos puntos extremos son $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, calculando primero las distancias entre los segmentos y dibujando la gráfica.

5. P(-1,-7) P_1(-3,-15) P_2(2,5)

6. P(3,3) P_1(-1,-3) P_2(5,6)

7. P(2,3) P_1(-2,1) P_2(8,6)

8. P$\left(\frac{16}{3},\frac{19}{3}\right)$ P_1(2,3) P_2(6,7)

En los ejercicios del 9 al 12, encuentra las coordenadas del punto P(x,y) que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ con coordenadas de sus extremos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dada la razón r.

9. P_1(3,2) P_2(5,4) $r = \frac{3}{2}$

10. P_1(5,0) P_2(9,0) $r = -2$

11. P_1(-4,1) P_2(8,5) $r = \frac{3}{5}$

12. P_1(-1,6) P_2(3,-3) $r = \frac{3}{4}$

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si defines y aplicas el concepto de razón de un segmento de recta*. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Si un niño de A kg se sienta en un sube y baja en el punto $P1(x_1,y_1)$ y en el otro extremo con coordenadas $P2(x_2,y_2)$ se sienta otro niño de B kg. ¿Cómo harías para encontrar las coordenadas del punto entre los puntos P_1 y P_2, donde se debe colocar el soporte para que el sube y baja se mantenga en equilibrio? Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____
____

Aprende más

Punto medio de un segmento de recta

El punto medio de un segmento de recta es aquel que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos y divide al segmento en una razón de 1.

La coordenada del punto medio de un segmento de recta es igual a la semisuma de las coordenadas correspondientes de sus puntos extremos, mediante las fórmulas:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y2}{2}$$

Ejemplo:

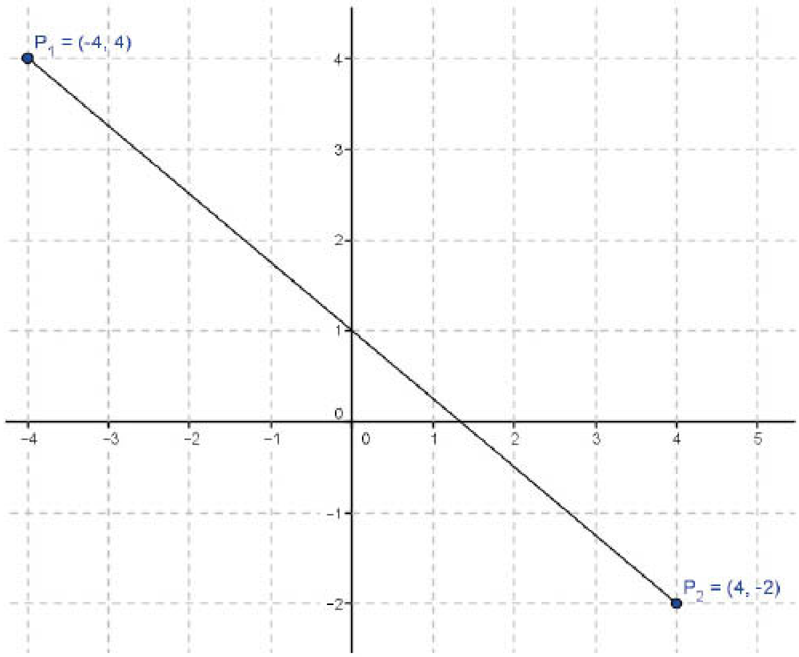
Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos extremos tiene coordenadas $P_1(-4,4)$ y $P_2(4,-2)$.

Solución

Sustituyendo los valores en las fórmulas: $x_M = \frac{-4+4}{2} = \frac{0}{2} \quad x = 0$

$$y_M = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} \quad y = 1$$

Las coordenadas del punto medio son PM = (0,1)



Ejemplo

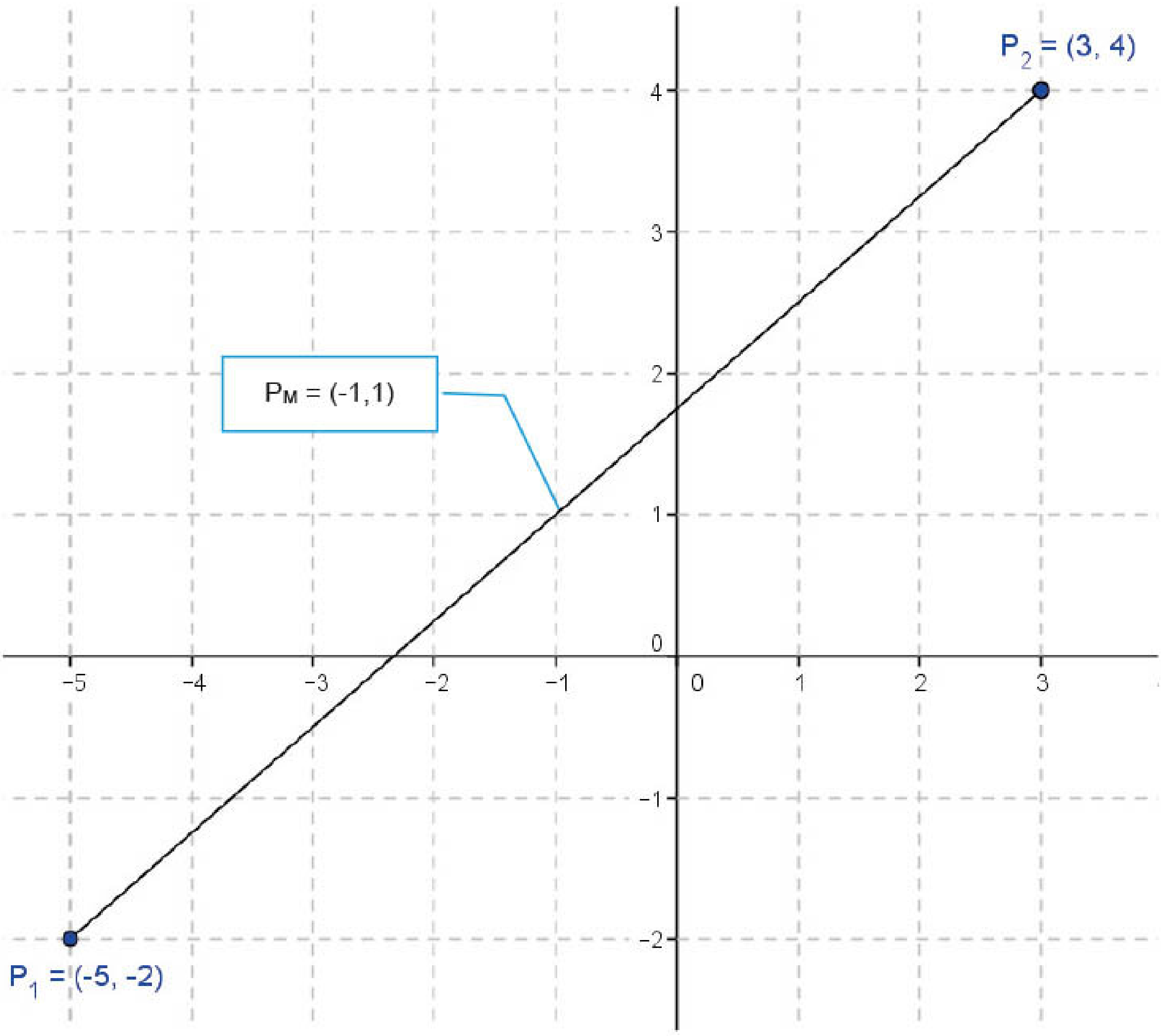
Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ cuyos extremos tiene coordenadas $P_1(-5,-2)$ y $P_2(3,4)$

Solución

Sustituyendo los valores en las fórmulas: $x_M = \dfrac{-5+3}{2} = \dfrac{-2}{2}$ $\quad x = -1$

$$y_M = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} \qquad y = 1$$

Las coordenadas del punto medio son $P_M = (-1,1)$



Ejemplo

Encuentra las coordenadas del punto P_2, sabiendo que $P_M(2,-2)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ y el otro extremo tiene coordenadas $P_1(-3,1)$.

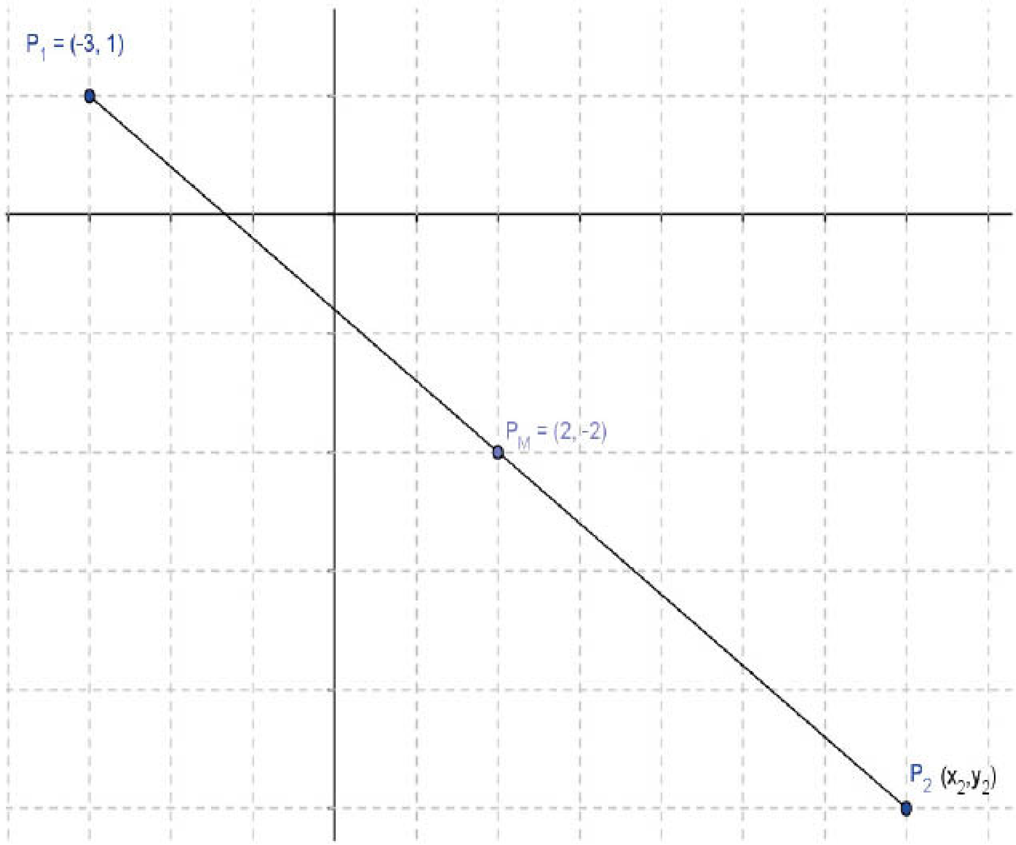
Solución

Las fórmulas para el punto medio son:

$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ $y_M = \frac{y_1+y2}{2}$ ıadas del punto $P_2(x_2,y_2)$, despejamos ambas:

$2x_M = x_1 + x_2$	$2y_M = y_1 + y_2$
$2x_M - x_1 = x_2$	$2y_M - y_1 = y_2$
$2(2) - (-3) = x_2$	$2(-2) - 1 = y_2$
$4 + 3 = x_2$	$-4 - 1 = y_2$
$\mathbf{x_2 = 7}$	$\mathbf{y_2 = -5}$

Las coordenadas del punto 2 son $P_2(7,-5)$



Ejemplo

Encuentra las coordenadas del punto P_1, sabiendo que $P_M(2,1)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ y el otro extremo tiene coordenadas $P_2(8,4)$.

Solución

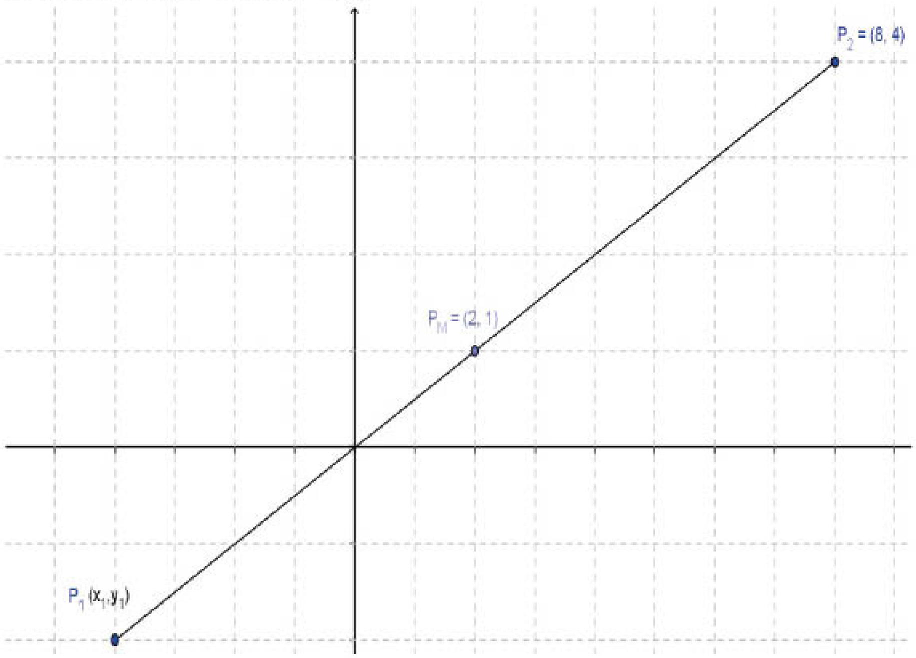
Las fórmulas para el punto medio son:

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $\qquad$ $y_M = \frac{y_1 + y2}{2}$

y como queremos conocer las coordenadas del punto $P_1(x_1,y_1)$, despejamos ambas:

$2x_M = x_1 + x_2$	$2y_M = y_1 + y_2$
$2x_M - x_2 = x_1$	$2y_M - y_2 = y_1$
$2(2) - (8) = x_1$	$2(1) - 4 = y_1$
$4 - 8 = x_1$	$2 - 4 = y_1$
$\boldsymbol{x_1 = -4}$	$\boldsymbol{y_1 = -2}$

Las coordenadas del punto 1 son $P_1(-4,-2)$



"No hay nada repartido de modo más equitativo que la razón: todo el mundo está convencido de tener suficiente".

-René Descartes

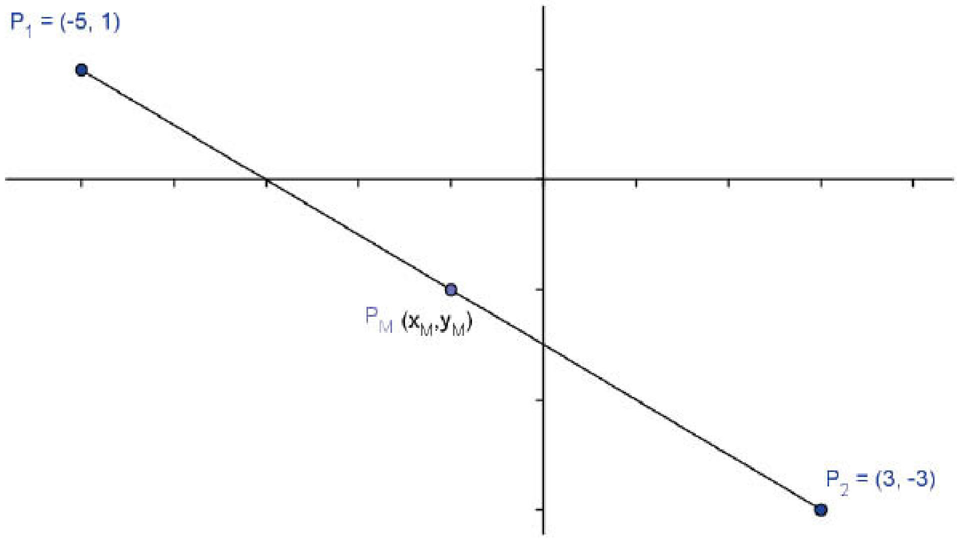
Aplica lo aprendido

Actividad 3

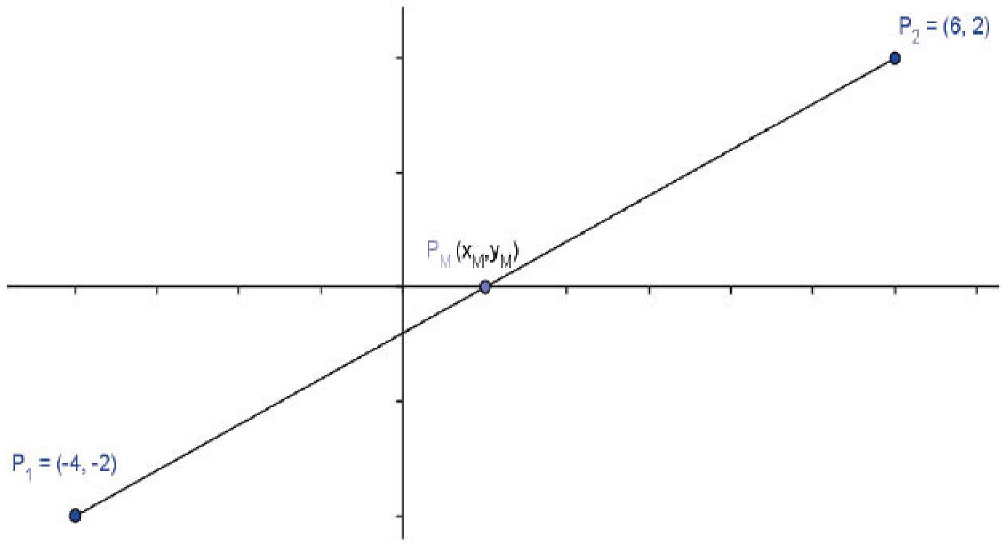
Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

En los ejercicios 1 a 4, calcula las coordenadas del punto medio $P_M(x_M, y_M)$ del segmento de recta $\overline{P_1P_2}$, cuyos extremos tienen coordenadas $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

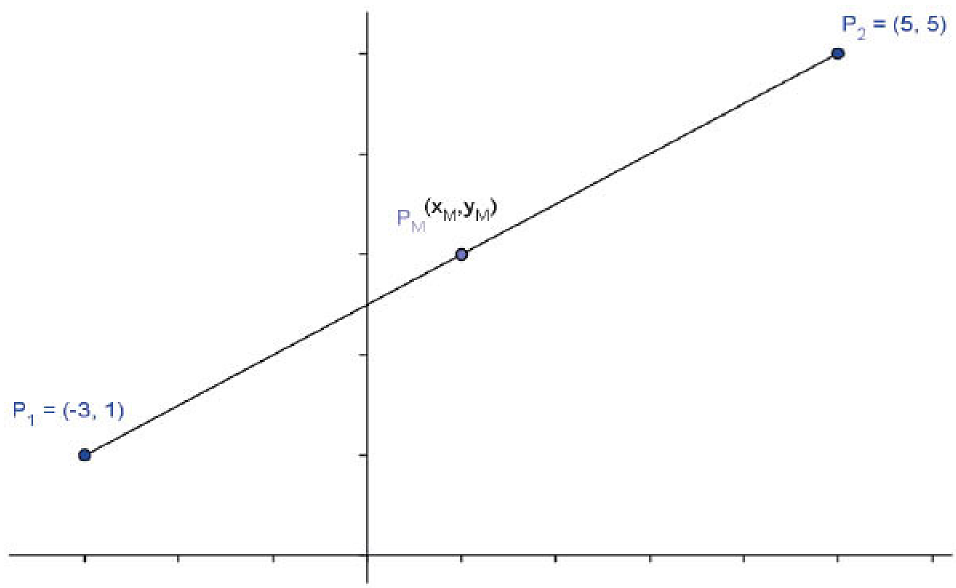
1.



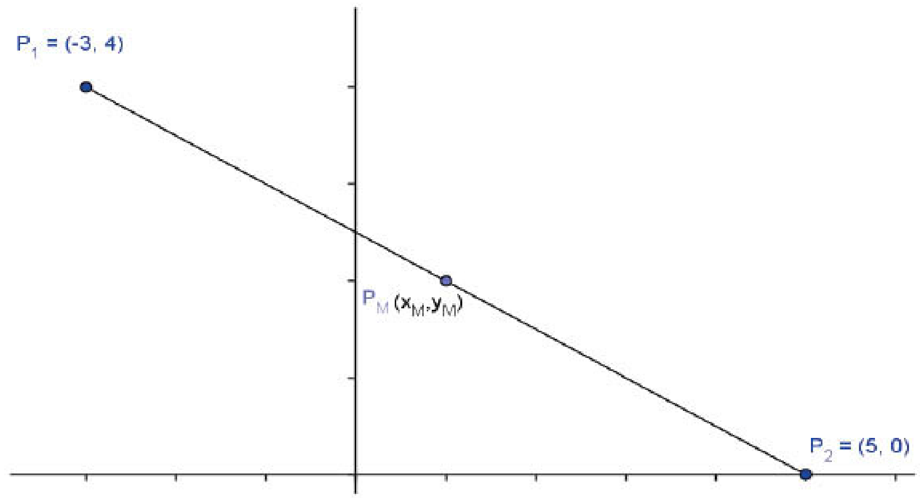
2.



3.

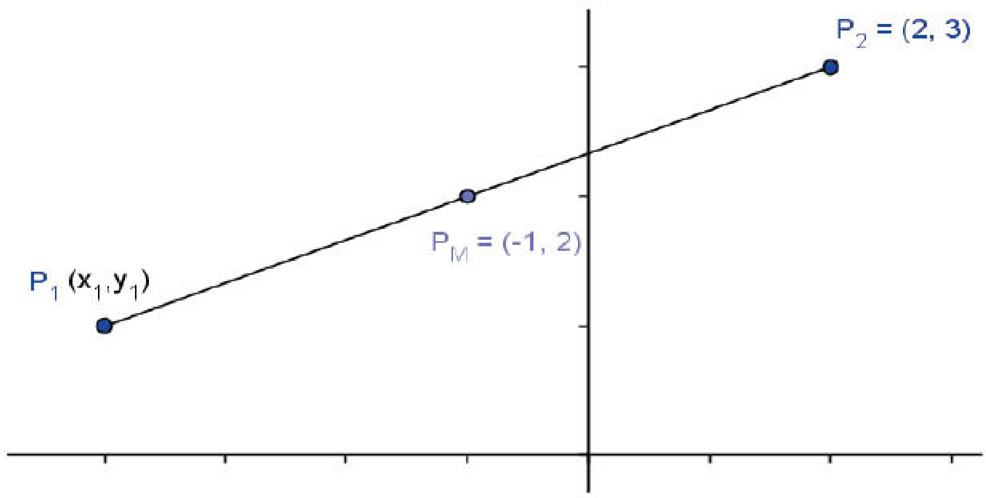


4.

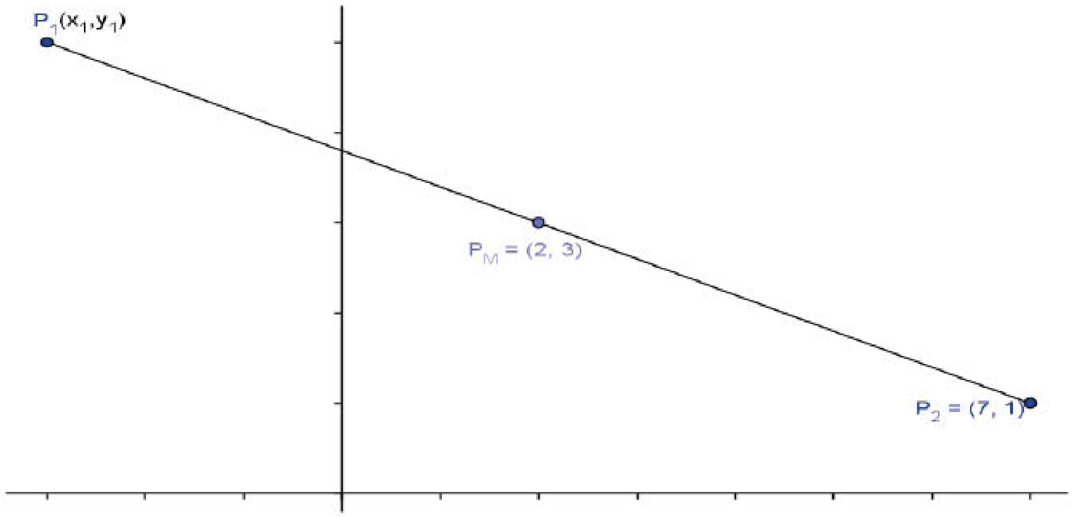


En los ejercicios del 5 al 8, encuentra las coordenadas del punto faltante, sabiendo que $P_M(x_M, y_M)$ es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$.

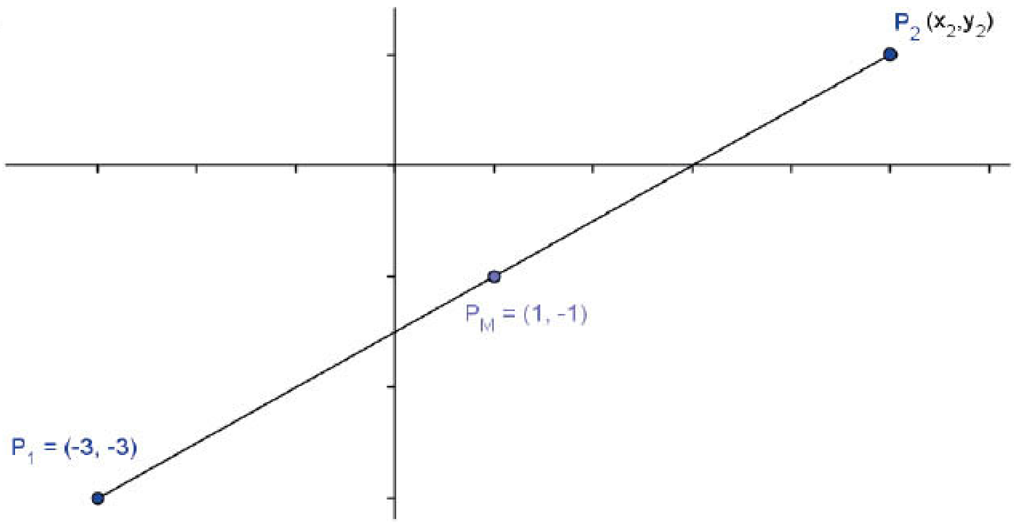
5.



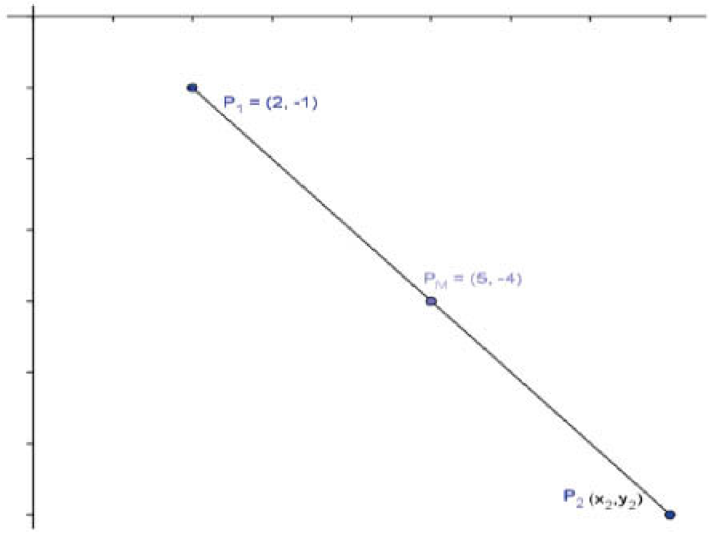
6.



7.



8.



Con la realización de estos ejercicios podrás *identificar si aplicas el concepto de punto medio de un segmento de recta.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En un mapa de la República Mexicana, con coordenadas y cuadriculado, ¿cómo harías para encontrar cuál es el centro del país desde las ciudades que están en los extremos (Tijuana y Chetumal) en línea recta? Argumenta tu respuesta.

____

____

____

Cierre de bloque II

Reflexiona sobre lo aprendido

En este bloque definimos a los segmentos de recta como la distancia comprendida entre dos puntos, asimismo los clasificamos en tres tipos: el horizontal, el vertical y el inclinado. Si en este segmento se indica el sentido se le conoce como segmento dirigido; de lo contrario se le considera como no dirigido.

También aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, ¿la recuerdas?

La distancia $\overline{P_1P_2}$ entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1,y_1)$ y $P2(x_2,y_2)$ está dada por la fórmula:

$$\overline{\mathbf{P_1P_2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dos de los conceptos básicos para la geometría son el perímetro y el área; y en este bloque los hemos conocido y aplicado. El perímetro de un polígono se refiere a la longitud del contorno de la figura, y el área es la cantidad de superficie que se encuentra dentro de ella.

Además, en este bloque aplicamos el concepto de punto medio de un segmento, que es aquel que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos y divide al segmento en una razón de 1.

Evaluación del bloque II

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque II.

Interpretación del nivel de avance:
100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Defines el concepto de segmento de recta.				
	Identificas los diferentes tipos de segmentos dirigidos y no dirigidos.				
	Deduces la fórmula de distancia entre dos puntos.				
	Identificas el concepto de perímetro y área de polígonos.				
	Defines el concepto de razón				
	Deduces el concepto de punto medio de un segmento.				

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Utilizas el concepto de segmento de recta para resolver ejercicios donde se calcule la distancia entre dos puntos.				
	Calculas el área y perímetro de polígonos regulares.				
	Resuelves ejercicios de cálculo de razones de un segmento de recta.				
	Calculas el punto medio segmentos de recta.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

____
____
____
____
____

2. ¿Cómo puedes utilizar lo aprendido en el presente y futuro?

____
____
____

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

____
____
____

Recuerda que deberás integrar las respuestas a tu cuaderno y anotar número del bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque II

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollado)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

BLOQUE III

Aplicas los elementos de una recta como lugar geométrico

Bloque III

8 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. Línea recta
   a) Pendiente y ángulo de inclinación de una recta
   b) Ángulo formado por dos rectas
2. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad
3. La ecuación de la recta como un modelo matemático

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: ejercicios de cálculo de pendiente y ángulo de inclinación de una recta.
- Actividad 2: ejercicios para determinar la relación que guardan entre sí dos rectas.
- Actividad 3: ejercicios de aplicación de la ecuación de la recta como un modelo matemático.

La resolución de los ejercicios formará parte del portafolio de evidencias.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás un total de tres productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.
- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje.

Introducción

En el bloque anterior aprendiste los distintos lugares geométricos que existen. Uno de ellos es la recta, haciendo uso de estos principios podemos crear modelos que tienen muchas aplicaciones en la vida cotidiana; por ejemplo, se pueden predecir los niveles de colesterol en la sangre si se consumen con regularidad cierto grupo de alimentos; asimismo podemos predecir el crecimiento económico de un país o de una empresa en determinado periodo, y representarlo con una línea recta con una determinada inclinación, a ésta se le denomina pendiente y que puede ser hacia arriba o hacia abajo.

La correcta aplicación de pendientes es muy necesaria, como en la construcción de las curvas de una carretera o de una pista motos o bicicletas, ya que si no es adecuada causaría muchos accidentes.

Asimismo, cuando se realizan construcciones es importante considerar, además de las distancias, ángulos y perímetros, los conceptos de perpendicularidad y paralelismo, al colocar ciertas piezas, tuberías, cableados, etcétera.

¿Con qué propósito?

Reconoces la recta como un lugar geométrico, encontrando la relación entre el ángulo de inclinación y la pendiente, mediante ejercicios con aplicaciones prácticas, calculando ángulos interiores de diversos polígonos, resolviendo problemas y/o ejercicios donde apliques las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre dos o más rectas en distintos contextos.

Para iniciar, reflexiona

Compraste una bicicleta hace ya varios años, y la quieres vender en este momento. ¿Cómo puedes estimar el costo de la bicicleta en la actualidad para venderla?

____
____
____
____

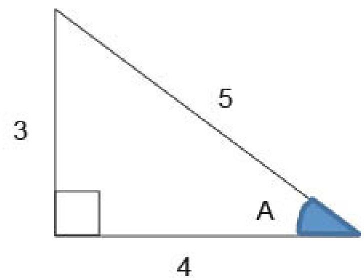
¿Con qué conocimientos cuento?

Has llegado al tercer bloque de matemáticas III, y para comprenderlo es conveniente recordar los siguientes temas.

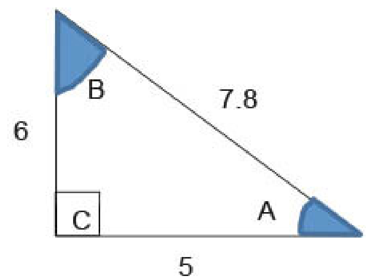
Evaluación diagnóstica.

Lee detenidamente las indicaciones de los incisos que se muestran enseguida y elabora en tu cuaderno lo que se te pide.

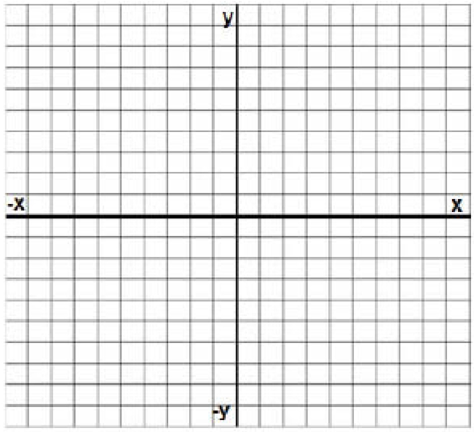
1. 1. Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de sen A, cos A y tan A del siguiente triángulo:



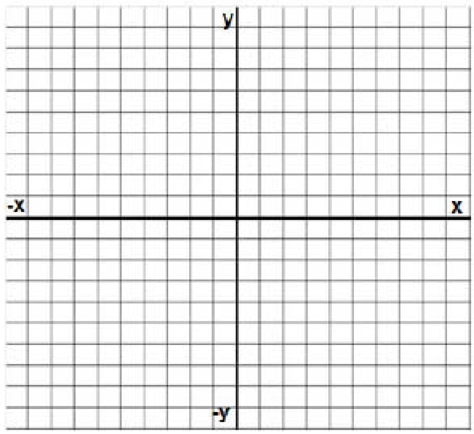
2. Encuentra los valores de los ángulos A, B y C del siguiente triángulo:



3. Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2,3) y B(5,8). Realiza la gráfica.



4. Encuentra el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(3,4) y B(7,10). Realiza la gráfica.



5. Despeja la variable dependiente *y* de la siguiente ecuación lineal

$8x + 2y - 14 = 0$

6. Despeja la variable dependiente y de la siguiente ecuación lineal

$4(6x - 3) - 3y + 24 = 0$

7. ¿Cómo se les llama a dos rectas que se encuentran a la misma distancia una de otra?______________________________

8. ¿Cuánto mide un ángulo recto?

____

9. ¿Cómo se les llama a dos rectas que al cruzarse forman ángulos rectos entre sí?

____

10. ¿Cómo se les llama a dos rectas que al cruzarse NO forman ángulos rectos entre sí?______________________________

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de Retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 preguntas considera tu resultado como Bueno, de 5 a 7 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 5 considera tu desempeño como No suficiente, lo cual exige que refuerces tus conocimientos previos, repasando tus apuntes de Matemáticas I y II.

¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando en este bloque los siguientes conceptos: **pendiente, ángulo de inclinación, rectas paralelas, rectas perpendiculares, rectas oblicuas.**

Aprende más

Línea recta

Para empezar este bloque, vamos a definir lo que es una línea recta. Pareciera un concepto muy simple pero en geometría tiene mucho sentido, pues de ella parte todo el conocimiento matemático en esta área. ¿Podrías hacer una lluvia de ideas sobre lo que es una línea recta? ¿Qué te viene a la mente? ________________

____

____

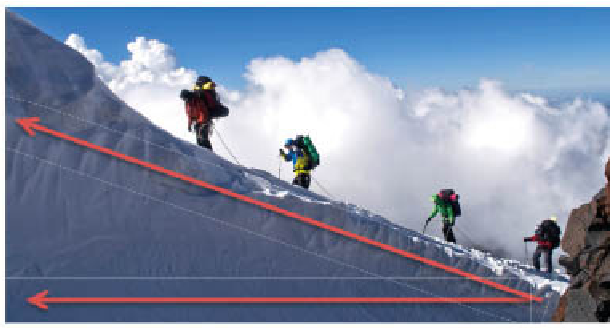
Seguramente contestaste cosas muy interesantes y que tienen que ver con la definición que vamos a conocer en este momento:

La línea recta: Conjunto infinito de puntos unidos en una misma dirección y de una sola dimensión, que se compone de segmentos infinitos, que son las pequeñas líneas que unen dos puntos.

Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Cuando vas subiendo por una montaña, cuanto más inclinada esté, mayor será el esfuerzo que tendrás que hacer para llegar a la cúspide. Esto se debe a que el ángulo de inclinación entre el piso y la montaña es muy grande. A dicha inclinación se le llama pendiente, y cuanto mayor sea el ángulo de inclinación, mayor será la pendiente.

Cuando estás subiendo la montaña, se dice que tiene una pendiente positiva. Al llegar a la cúspide y caminar unos pasos, el desplazamiento normalmente es horizontal, por lo que allí no hay inclinación, es decir, no hay pendiente (ésta tiene un valor de 0). Al descender de la montaña, se dice que tiene una pendiente negativa.



Como este ejemplo, la pendiente tiene un sinnúmero de aplicaciones en Matemáticas, Física, Ciencias Naturales, y Economía, en fin, en muchas situaciones de nuestra vida que suceden frecuentemente.

¿Podrías escribir dos situaciones donde observas la existencia de una pendiente?

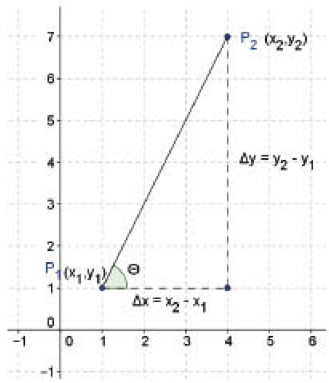
____

____

Vamos a definir de manera más formal la pendiente.

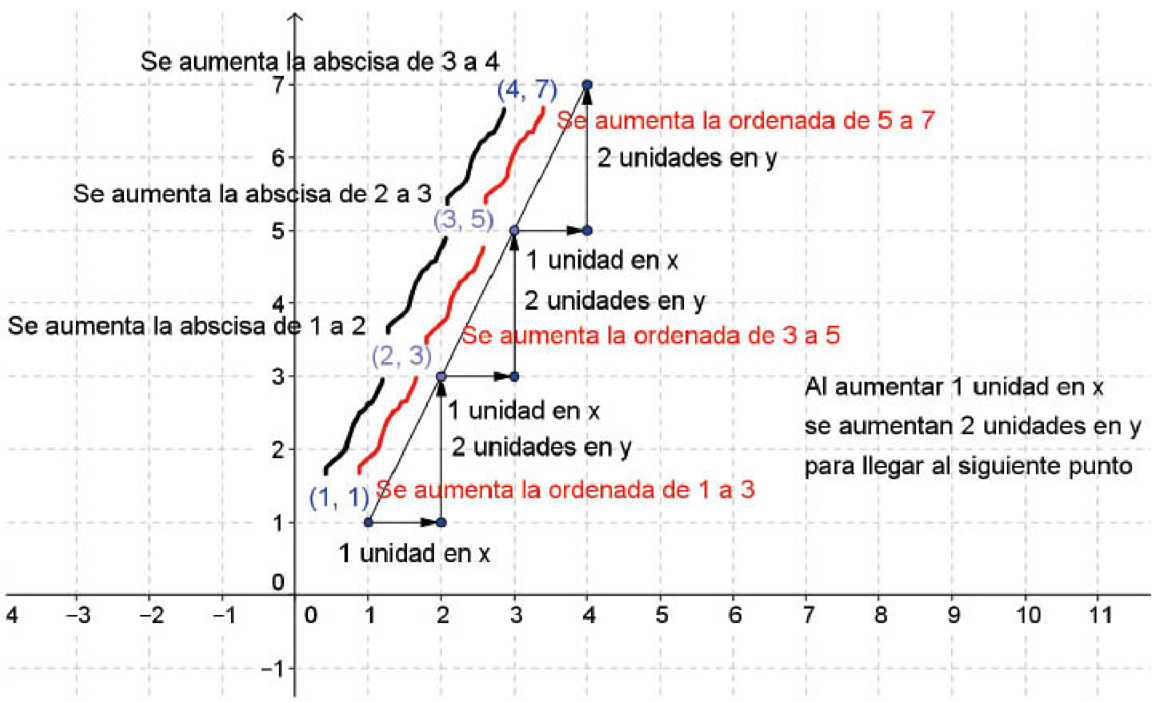
Pendiente de una recta: es el grado (medida) de inclinación de una recta. Si lo vemos en una gráfica como en la imagen inferior, es el cambio en el eje *y* con respecto al cambio en el eje *x*. La pendiente se representa con la letra *m*.

Si una recta pasa por dos puntos distintos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces su pendiente (*m*) está dada por:



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde x_1 tiene que ser diferente de x_2.

Esto es, $m = \dfrac{cambio\ vertical\ (elevación)}{cambio\ horizontal\ (recorrido\ o\ desplazamiento)}$



Esta gráfica pertenece a la ecuación de la recta $y = 2x - 1$, donde al darle valores obtenemos:

x	$y = 2x - 1$
1	$2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$
2	$2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$
3	$2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$
4	$2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

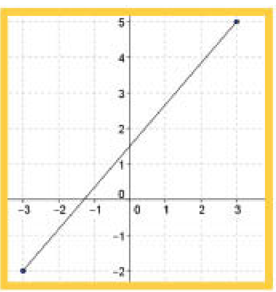
Cabe aclarar que es posible dar cualquier valor a *x*, además de que la *y* puede resultar también en valores racionales (fracciones o decimales).
En la tabla constatamos que al aumentar en 1 el valor de *x*, se aumenta en 2 el valor de *y*.

La pendiente puede ser de varios tipos:

Tipos de pendiente

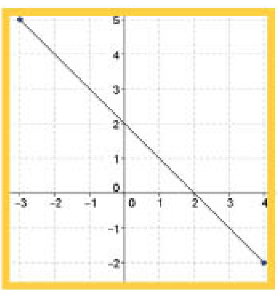
Positiva

Al aumentar la variable independiente (*x*) aumenta también la variable dependiente (*y*). Va de izquierda a derecha.



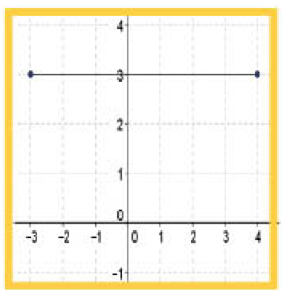
Negativa

Al aumentar la variable independiente (*x*) disminuye la variable dependiente (*y*). Va de derecha a izquierda.



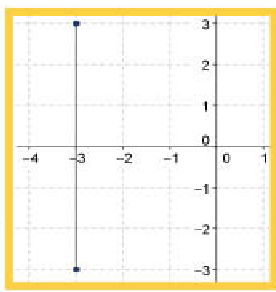
Cero

No existe inclinación de la recta al ser completamente horizontal, por lo que el valor de la pendiente es cero.



Indefinida

La recta es completamente vertical y el ángulo de inclinación es de 90º. Se extiende hasta el infinito de manera indefinida.



Ángulo de inclinación de una recta: es el menor de los ángulos que forma una recta con el eje horizontal x, medido siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Por lo tanto, el ángulo de inclinación de una recta siempre varía de 0° a 180° y se pueden presentar los siguientes casos.

- Si la pendiente es positiva, el ángulo de inclinación siempre será agudo (menor a 90º)
- Si la pendiente es negativa, el ángulo de inclinación siempre será obtuso (más de 90º y menos de 180º).
- La pendiente es igual a cero si el ángulo es de 0º (no hay inclinación).
- La pendiente es indefinida o infinita ∞ si el ángulo es recto (igual a 90º).
- Se le llama pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación (θ), la relación entre la pendiente y el ángulo de inclinación es:

$$m = \tan\theta$$

es decir, la pendiente es igual a la tangente del ángulo de inclinación.

Para los siguientes ejercicios es necesaria una calculadora científica, donde utilizarás la función *tan*

Ejemplo 1

Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 60°

Solución

$m = \tan 60°$
$m = 1.732$

Ejemplo 2

Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 75°

Solución

$m = \tan 75°$
$m = 3.732$

Ejemplo 3

Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 120°

Solución

$m = \tan 120°$
$m = -1.732$

Ejemplo 4

Encuentra la pendiente de la recta cuyo ángulo de inclinación es de 160°

Solución

$m = \tan 160°$
$m = -0.364$

Ahora encontraremos el ángulo de inclinación:

Ejemplo 5

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es 3

Solución

$m = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(3)$

$\theta = 71.56°$

Ejemplo 6

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es 1.5

Solución

$m = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(1.5)$

$\theta = 56.31°$

Ejemplo 7

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es -2

Solución

$m = \tan\theta$
$\theta = \tan^{-1} m$
$\theta = \tan^{-1}(-2)$
$\theta = -63.43°$

Como el ángulo es negativo, indica que se ha medido en contra de las manecillas del reloj, por lo tanto $\theta = 180° - 63.43°$ $\theta = 116.57°$

Ejemplo 8

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es $-\frac{3}{2}$

Solución

$m = \tan\theta$
$\theta = \tan^{-1} m$
$\theta = \tan^{-1}(3/2)$
$\theta = -56.30°$

Como el ángulo es negativo, indica que se ha medido en contra de las manecillas del reloj, por lo tanto, $\theta = 180° – 56.30°$ $\theta = 123.7°$

En los problemas que abordaremos, normalmente no se indica la medida del ángulo de inclinación de la recta, sino que tenemos sus dos puntos, que se resuelven con la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 9

Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-2,4) y B(4,-3)

Solución

Podemos tomar el punto A como el punto 1 de coordenadas $P_1(x_1,y_1)$ y el punto B como el punto 2 de coordenadas $P_2(x_2,y_2)$. Se puede tomar también al revés los puntos A y B, es decir, no importa qué punto tomamos como P_1 y P_2.

Primero se calcula la pendiente:

Tomando el punto $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-4}{4-(-2)} = \frac{-7}{6}$$

m = -1.17

Tomando el punto $B(x_1,y_1)$ y $A(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-3)}{-2-4} = \frac{7}{-6}$$

m = -1.17

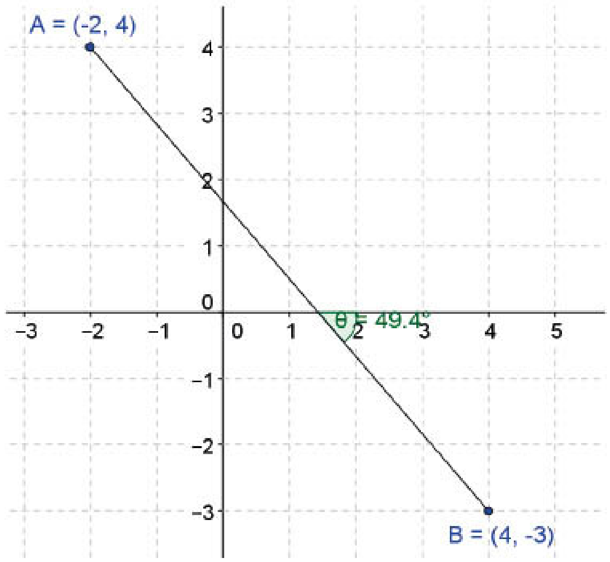
Luego calculamos el ángulo de inclinación:

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(-1.17)$

θ = -49.48 (indica que es medido en contra de las manecillas del reloj)

Gráficamente:



Ejemplo 10

Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(-2,-1) y B(1,5)

Solución

Calculamos primero la pendiente

Tomando el punto $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-(-1)}{1-(-2)} = \frac{6}{3}$$

m = 2

Tomando el punto $B(x_1,y_1)$ y $A(x_2,y_2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-1-5}{-2-1} = \frac{-6}{-3}$$

m = 2

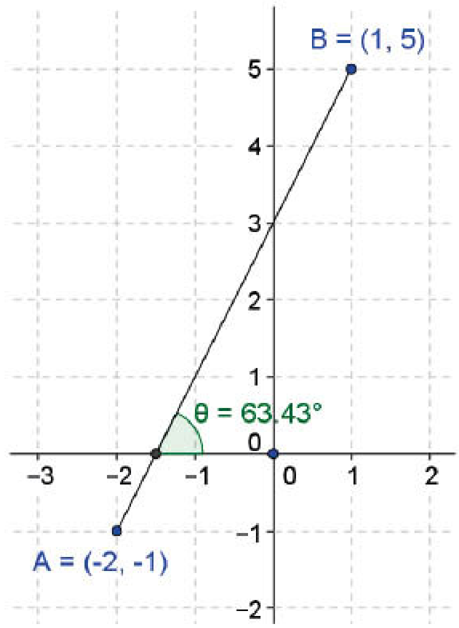
Luego calculamos el ángulo de inclinación

$\theta = \tan^{-1} m$

$\theta = \tan^{-1}(2)$

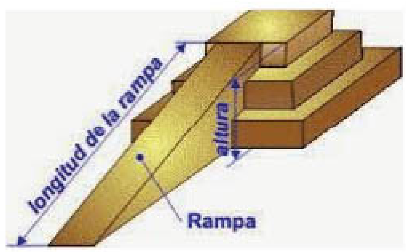
$\theta = 63.43°$

Gráficamente:



Sabías que…

El plano inclinado, también conocido como rampa, es una máquina simple que se emplea para subir o bajar objetos con mayor facilidad que cuando se hace, por ejemplo, por unas escaleras; su inclinación hará más fácil o difícil el trabajo.



Ejemplo 11

Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A(1,-2) y B(-2,3)

Solución

Primero se calcula la pendiente:

Tomando el punto A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-2)}{-2-1} = \frac{5}{-3}$$

m = -1.67

Tomando el punto B(x_1,y_1) y A(x_2,y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{1-(-2)} = \frac{-5}{3}$$

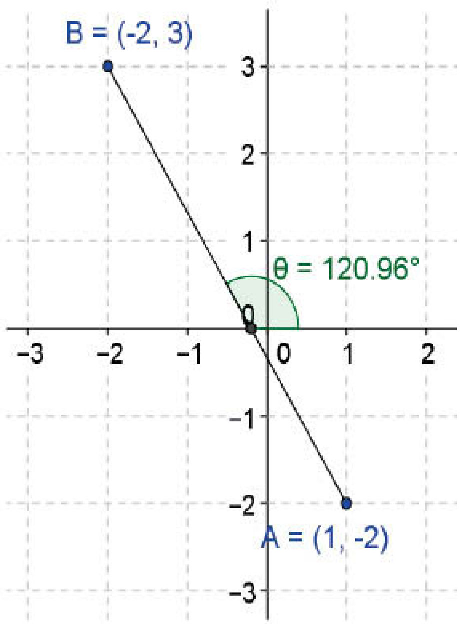
m = -1.67

Luego calculamos el ángulo de inclinación

$\theta = \tan^{-1} m$
$\theta = \tan^{-1}(-1.67)$
$\theta = -59.04°$ (indica que es medido en contra de las manecillas del reloj).

sumar 180° con -59.04° = 120.96°

Gráficamente:

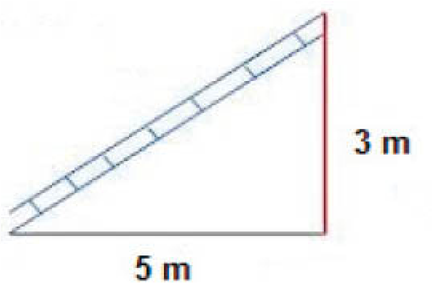


Ejemplo 12

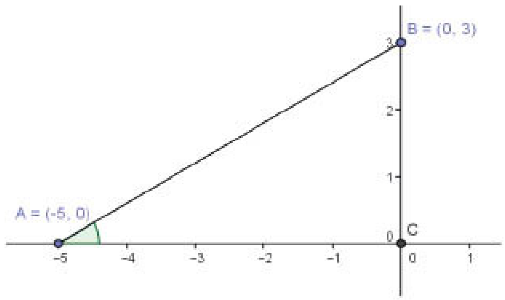
Se apoya una escalera en una pared, quedando un extremo a 3 m del piso y el otro extremo a 5 m de distancia de la pared. ¿A qué ángulo quedó inclinada la escalera?

Solución

Es conveniente hacer el dibujo:



Si lo trazamos en un plano cartesiano:



Primero se calcula la pendiente:

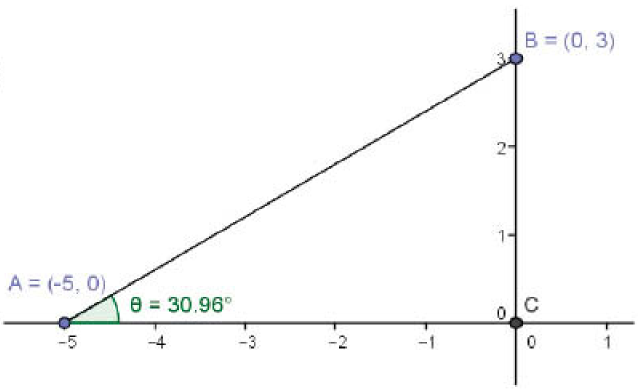
Tomando el punto A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{0-(-5)} = \frac{3}{5}$$

$m = 0.6$

Luego calculamos el ángulo de inclinación
$\theta = \tan^{-1} m$
$\theta = \tan^{-1}(0.6)$
La escalera queda inclinada a $\theta = 30.96°$

Gráficamente:



Ejemplo 13

Una empresa tuvo ventas en 2009 por \$ 6’500,000 y en 2013 tuvo ventas por \$ 8’250,000. ¿Cuál fue su tasa de crecimiento anual?

Solución

Es conveniente definir primero cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente. Nos hacemos las siguientes preguntas:

¿El valor de las ventas depende del tiempo que transcurre?
¿El tiempo que transcurre depende del valor de las ventas?

La respuesta es que el valor de las ventas depende del tiempo que transcurre, por lo que asignaremos a *x* el tiempo y a *y* el valor de las ventas.
Una vez definido esto, asignamos a P_1(2009,6’500,000) y P_2(2013,8’250,000).
x_1 y_1 x_2 y_2

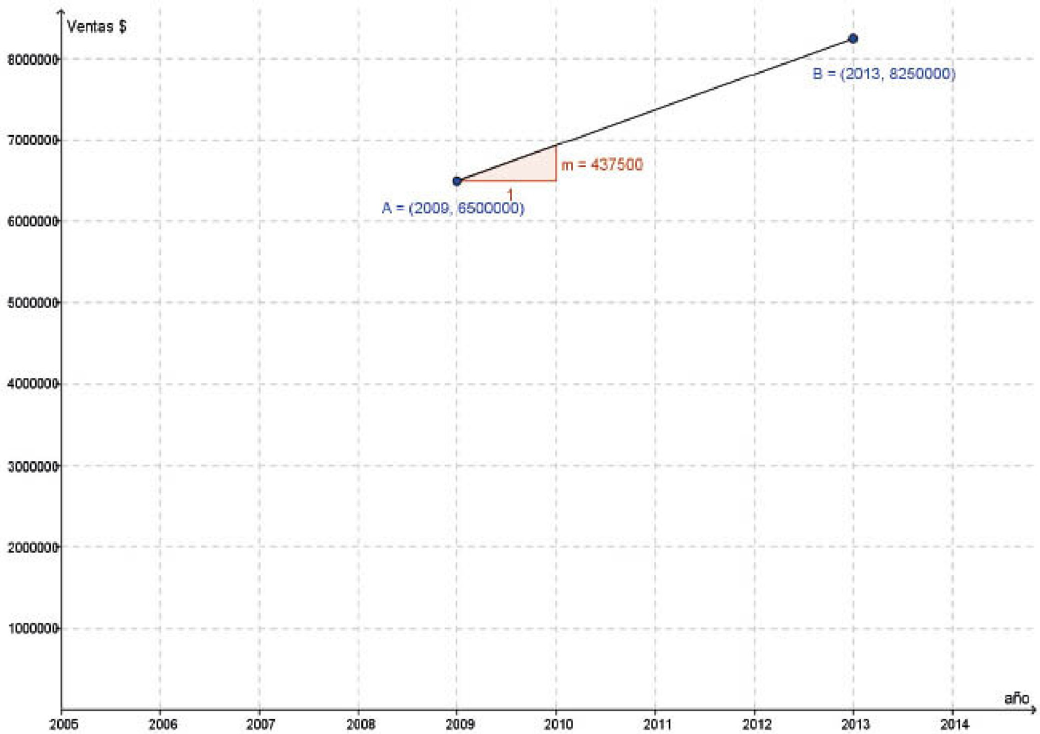
Calculamos la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8\,250\,000 - 6\,500\,000}{2013 - 2009} = \frac{1\,750\,000}{4}$$

m = 437 500

Por lo que la empresa crece \$ 437,500 cada año

Gráficamente:



Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. ¿Qué entiendes por pendiente?

____
____
____

2. Describe la relación que existe entre la pendiente y el ángulo de inclinación.

____
____
____
____
____

Completa los siguientes enunciados de manera correcta.

3. La ______________________ es el cambio que se da de manera vertical entre dos puntos en una recta. El ______________________________ es el cambio que se da de manera horizontal entre los mismos puntos de la recta.

4. La pendiente de una recta es ______________________ cuando al aumentar la variable independiente aumenta también la variable dependiente, es decir, cuando se mueve de izquierda a derecha de manera ascendente.

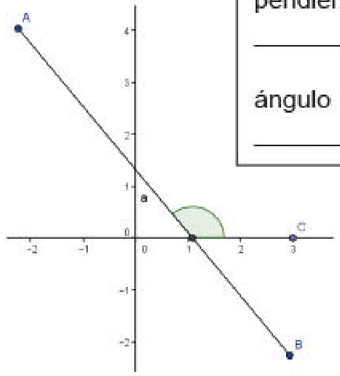
5. La pendiente de una recta es ______________________ cuando al aumentar la variable independiente disminuye la variable dependiente, es decir, cuando se mueve de derecha a izquierda de manera descendente.

6. La pendiente de una recta es ______________________ cuando no tiene inclinación, es decir, la recta es completamente horizontal.

7. La pendiente de una recta es ______________________ cuando la recta es completamente vertical.

8. Indica cómo es la pendiente (positiva, negativa, cero, indefinida), así como el ángulo de inclinación que se forma (agudo, obtuso, cero, 90°) de las siguientes gráficas.

a)



pendiente

____

ángulo

____

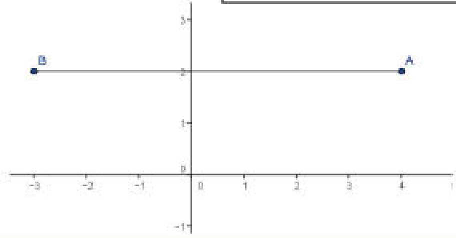
b)

pendiente

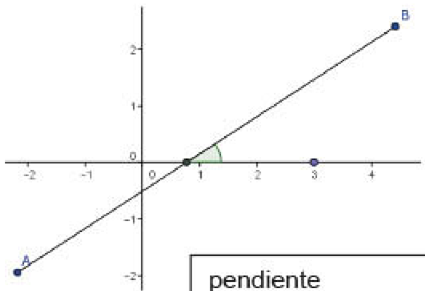
____

ángulo

____



c)



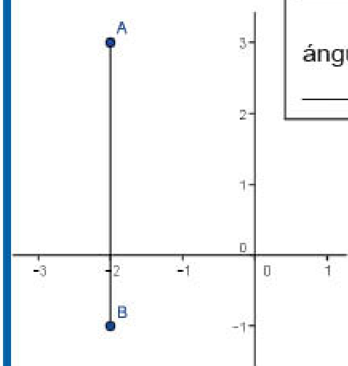
pendiente

____

ángulo

____

d)



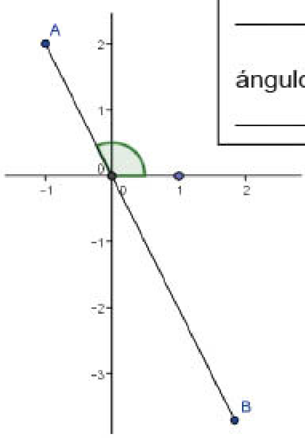
pendiente

____

ángulo

____

e)



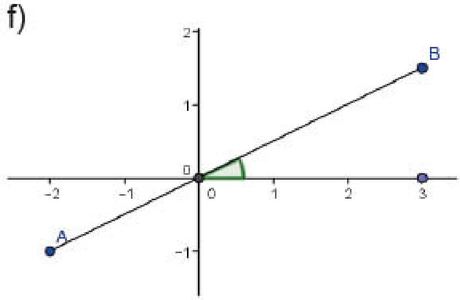
pendiente

____

ángulo

____

f)



pendiente

____

ángulo

____

9. Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que pasan por los puntos indicados a continuación.

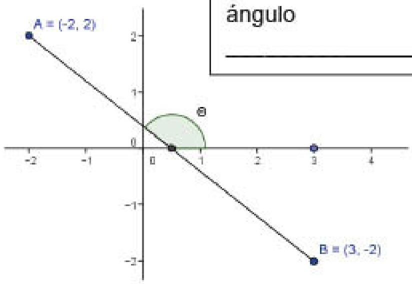
a)

pendiente

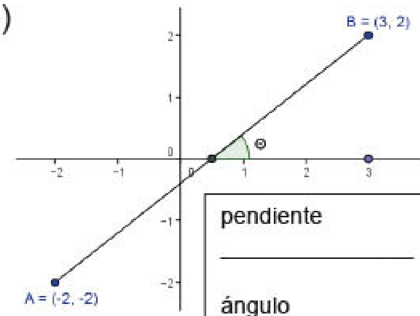
____

ángulo

____



b)



pendiente

____

ángulo

____

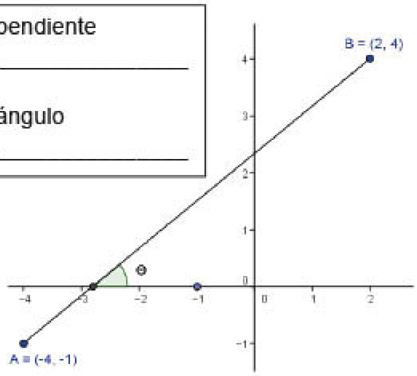
c)

pendiente

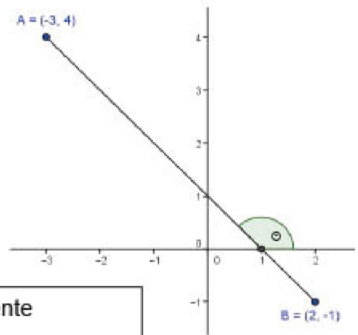
____

ángulo

____



d)



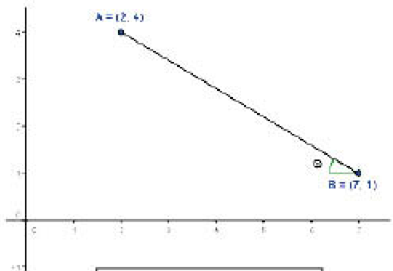
pendiente

____

ángulo

____

e)



pendiente

____

ángulo

____

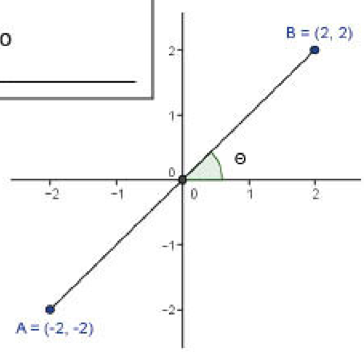
f)

pendiente

____

ángulo

____



Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar utilizas el concepto de pendiente de una recta y calculas el ángulo de inclinación.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

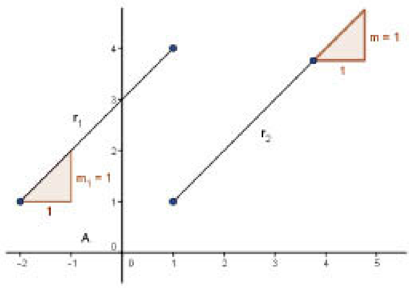
¿Qué crees que al subir una escalera sea más fácil, que esté más inclinada o menos inclinada? ¿Qué riesgos tienes? Justifica tus respuestas.

Aprende más

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de una recta

Condición de paralelismo: si dos rectas no verticales son paralelas, tienen pendientes y ángulos de inclinación iguales.
Esto es, $m_A = m_B$

Gráficamente podemos observar que:



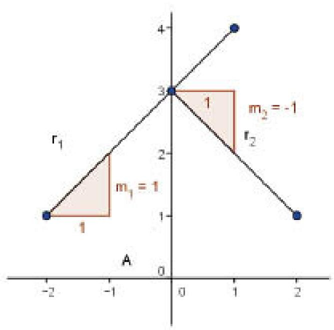
Y se observa que las pendientes m_1 y m_2 son iguales, es decir $m_1 = m_2 = 1$

Condición de perpendicularidad: para que dos rectas sean perpendiculares (ninguna de ellas vertical) el producto o la multiplicación de sus pendientes debe ser igual a -1. Esto es $(m_A)\,(m_B) = -1$, es decir, las pendientes deben ser recíprocas y de signo contrario, además de formar un ángulo de inclinación de 90°.

Dos números son recíprocos si su producto es igual a 1.

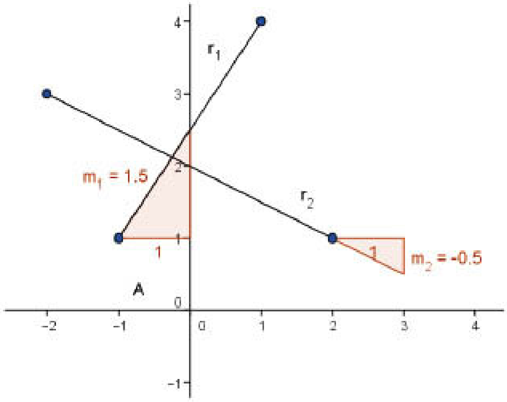
Por ejemplo, los siguientes números son recíprocos (los que están en paréntesis):

$(7)\left(\frac{1}{7}\right) = 1$ $\quad (-9)\left(-\frac{1}{9}\right) = 1$ $\quad \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = 1$ $\quad \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$



Se multiplican las pendientes $m_1\ m_2$, (1)(-1) = -1 y se comprueba que al multiplicarse el resultado es igual a -1.

Si las rectas NO son paralelas ($m_1 \neq m_2$) NI perpendiculares ($m_1 m_2 \neq -1$), entonces las rectas se llaman *oblicuas*.



En este ejemplo observamos que $m_1 = 1.5$ y $m_2 = -0.5$, por lo que $m_1 \neq m_2$, $1.5 \neq -0.5$, entonces las rectas no son paralelas.

Ahora, si multiplicamos $m_1 m_2$ (1.5)(-0.5) = -0.75, por lo que $m_1 m_2 \neq -1$, entonces, tampoco son perpendiculares las rectas, y se definen como *rectas oblicuas.*

Ejemplo

Determina si las rectas r_1 que pasa por los puntos A(-2,-2) y B(1,4) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(1,-2) y D(4,4), son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

Primero se calcula la pendiente de cada recta:

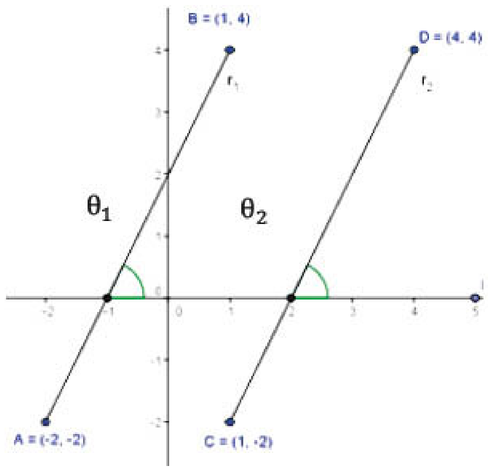
Para la recta r_1

$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{1-(-2)} = \frac{6}{3}$ $\qquad$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{4-1} = \frac{6}{3}$

$m_1 = 2$ $\qquad$ $m_2 = 2$

Como $m_1 = m_2$ se concluye que las rectas r_1 y r_2 son *paralelas.*

Gráficamente:



Ejemplo 14

Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(-3,-2) y B(-1,2) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(-2,0) y D(1.5,-1.75) son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

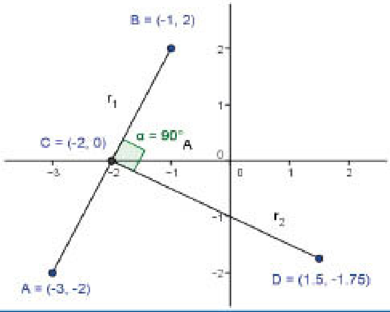
Primero se calcula la pendiente de cada recta:
Para la recta r_1

$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-(-2)}{-1-(-3)} = \frac{4}{2}$ $\qquad$ $m_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-1.75-0}{1.5-(-2)} = \frac{-1.75}{3.5}$

$m_1 = 2$ $\qquad$ $m_2 = -\frac{1}{2}$

Como $m_1 \neq m_2$ se multiplican $m_1 m_2$ $(2)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, se concluye que las rectas r_1 y r_2 son *perpendiculares*.

Gráficamente:



Ejemplo 15

Determina si las rectas r_1 que pasa por los puntos A(-2,-2) y B(2,2) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(-3,1) y D(3,-1), son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

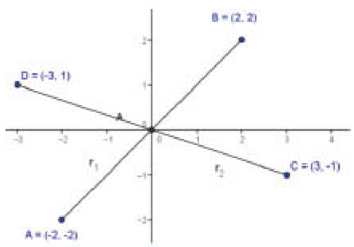
Solución

Primero se calcula la pendiente de cada recta:
Para la recta r_1

$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{2-(-2)}{2-(-2)} = \frac{4}{4}$ $\qquad$ $m_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-1-1}{3-(-3)} = \frac{-2}{6}$

$m_1 = 1$ $\qquad$ $m_2 = -\frac{1}{3}$

Como $m_1 \neq m_2$, se multiplican $m_1 m_2$, $(1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$, se concluye que las rectas r_1 y r_2 como no son ni paralelas ni perpendiculares, son rectas *oblicuas*.

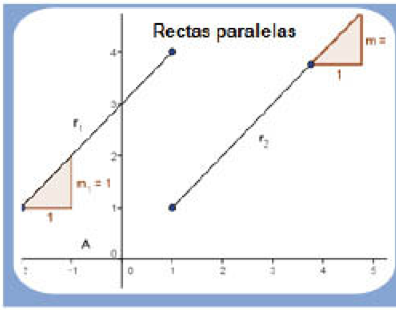


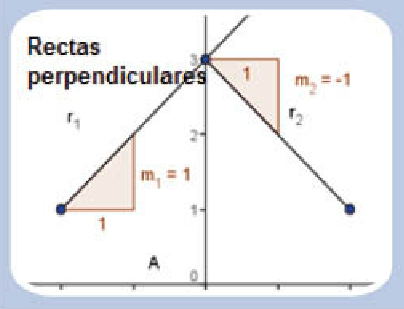
Aplica lo aprendido

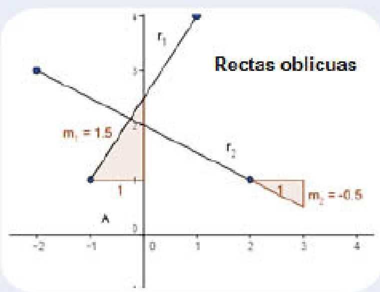
Actividad 2

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que después las comentes con tus compañeros de clase; también escucha las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

1. Menciona brevemente las condiciones para que dos rectas sean paralelas, perpendiculares u oblicuas.







Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

2. Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(4,1) y B(-2,5) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(3,7) y D(-1,1) son paralelas, perpendiculares u oblicuas. Realiza la gráfica.

3. Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(1,3) y B(2,6) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(7,8) y D(6,5) son paralelas, perpendiculares u oblicuas. Realiza la gráfica.

4. Determina si la recta r_1 que pasa por los puntos A(4,3) y B(-2,1) y la recta r_2 que pasa por los puntos C(4,-1) y D(-1,4) son paralelas, perpendiculares u oblicuas. Realiza la gráfica.

5. Comprueba por medio de pendientes que los puntos A(3, 1), B(7, 3) y C(1, 5), sean los vértices de un triángulo rectángulo. Realiza la gráfica.

Después de realizar estos ejercicios, reflexiona si utilizaste las condiciones de perpendicularidad y paralelismo para determinar la relación que guardan entre sí dos rectas. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cómo puedes comprobar qué tipo de triángulo se forma con 3 líneas utilizando pendientes? Justifica tus respuestas.

Aprende más

La ecuación de la recta como un modelo matemático

Gran parte del mundo funciona gracias a las reglas matemáticas. Los sistemas lineales son un claro ejemplo de cómo emplear esta disciplina en la vida real; por ejemplo, existen condiciones donde la salida de un sistema se duplica si la entrada se duplica, o donde la salida se corta a la mitad si pasa lo mismo con la entrada. Este ejemplo habla del sistema lineal y es posible describirlo con una ecuación lineal.

Ejemplos tales como la depreciación de artículos (su precio se va perdiendo con el paso del tiempo), la variación de la temperatura, la ley de la oferta y la demanda de artículos, los problemas relacionados con la educación, medicina, y prácticamente en cualquier ramo, son aplicables mediante ecuaciones de la recta tomadas como modelos matemáticos.

Depreciación
disminución del valor de un bien.

En las siguientes actividades veremos algunos ejemplos de cómo se pueden aplicar las ecuaciones lineales en lo cotidiano. Es conveniente seguir una serie de pasos para resolverlas de la manera más fácil y efectiva:

- Lo primero que hay que hacer para resolver estas situaciones es convertir nuestros datos en un modelo matemático.
- Se calcula la pendiente sustituyendo los datos que ofrece el problema en la fórmula correspondiente.
- Una vez obtenida, se sustituye la pendiente y uno de los puntos en la ecuación de la forma punto-pendiente.
- Después se transforma esta ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen, para realizar los cálculos solicitados en cada situación específica.
- Es conveniente trazar siempre la gráfica para darnos una idea más exacta de lo que estamos hablando.

Ejemplo 16

El valor depreciado de una motocicleta es de $7,600 al final de 7 años después de su compra, y de $5,200 al término de 10 años. Si el valor de la motocicleta varía linealmente con el tiempo de uso, determina:

a) La función que expresa el valor de la motocicleta con respecto al tiempo.
b) El valor de la motocicleta cuando era nueva.
c) ¿Cuánto cuesta la motocicleta después de 5 años de uso?
d) Si quisiera vender la motocicleta en $3,000, ¿a los cuántos años sería?
e) ¿En cuánto tiempo se deprecia la motocicleta por completo?
f) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores

Solución

1. Los datos que el problema ofrece son:
   x_1 7 años – $7,600 y_1
   x_2 10 años – $5,200 y_2

Aquí es importante definir que el valor de la motocicleta depende del tiempo que transcurre, es decir, el precio se va depreciando (bajando su valor), por lo que el tiempo se considera como la variable independiente x y el valor como la variable dependiente y.

2. Se calcula la pendiente, sustituyendo los valores de los 2 puntos:

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5200 - 7600}{10 - 7} = \frac{-2400}{3}$$
$$\mathrm{m} = -800$$

Aquí se interpreta que *por cada año* que pasa *la motocicleta se deprecia $800.*

3. Se sustituyen la pendiente y el punto $P_1(x_1, y_1)$ en la ecuación de la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7{,}600 = -800(x - 7)$$

4. Se transforma esta ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y - 7{,}600 = -800x + 5{,}600$$
$$y = -800x + 5{,}600 + 7{,}600$$

a) $y = -800x + 13{,}200$

Ésta es la ecuación con la que se realizarán los cálculos de los incisos, es decir, es la función que expresa el valor de la motocicleta con respecto al tiempo.

b) Cuando la motocicleta era nueva, no había transcurrido tiempo, es decir, $x = 0$
$y = -800(0) + 13{,}200$
$y = 0 + 13{,}200$
$y = \$\ 13{,}200$
El precio de la moto nueva era de $13,200

c) Al transcurrir 5 años, $x = 5$

$y = -800(5) + 13{,}200$

$y = -4{,}000 + 13{,}200$

y = $9,200

El precio de la moto a **los 5 años** era de $ 9,200

d) En cuánto tiempo se vende la motocicleta en $ 3,000, es decir, $y = 3{,}000$

$3{,}000 = -800x + 13{,}200$

Se despeja x

$3{,}000 - 13{,}200 = -800x$

$\frac{-10200}{-800} = x$

$x = 12.75$

Por lo que se puede vender en $3,000 la motocicleta a los 12.75 **años**.

e) Para que la moto se deprecie por completo, su valor es 0, es decir, y = 0

$0 = -800x + 13{,}200$

Se despeja x

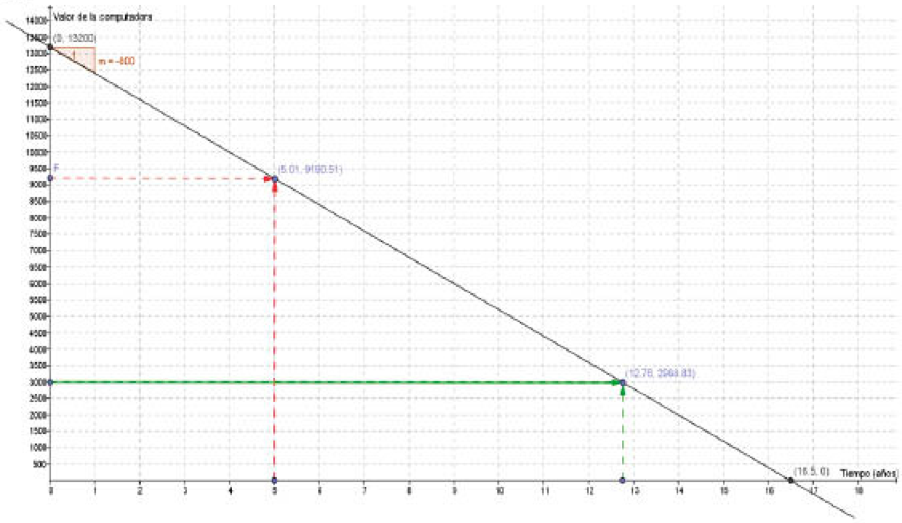
$0 - 13{,}200 = -800x$

$\frac{-13200}{-800} = x$

$x = 16.5$

Por lo que la motocicleta se deprecia por completo a los **16 años y medio**.

f) Gráfica



Como te podrás dar cuenta, en la gráfica salen los valores casi exactos (son muy parecidos a los que resultaron matemáticamente).

Ejemplo 17

Un bebé crece de manera constante durante su primer año. Si el segundo mes medía 54 cm y al octavo mes medía 66 centímetros. Determina:

a) La función que expresa la estatura del bebé con respecto al tiempo.
b) La estatura del bebé recién nacido.
c) ¿Cuánto medirá el bebé al medio año (6 meses)?
d) ¿En cuánto tiempo el bebé medirá 70 cm?
e) ¿Cuánto medirá el bebé al año (12 meses) de nacido?
f) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores.

Solución

1. Los datos que el problema ofrece son:
x_1 2 meses – 54 cm y_1
x_2 8 meses – 66 cm y_2

Aquí es importante definir que la estatura del bebé depende del tiempo que transcurre, es decir, la estatura va aumentando con el tiempo, por lo que el tiempo se considera como la variable independiente x y la estatura como la variable dependiente y.

2. Se calcula la pendiente, sustituyendo los valores de los 2 puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{66-54}{8-2} = \frac{12}{6}$$

$m = 2$

Aquí se interpreta que por cada mes que transcurre el bebé crece 2 cm en promedio.

3. Se sustituye la pendiente y el punto $P_1(x_1,y_1)$ en la ecuación de la forma punto-pendiente
$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 54 = 2(x - 2)$

4. Se transforma esta ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen:
$y - 54 = 2x - 4$
$y = 2x - 4 + 54$

a) $y = 2x + 50$
Ésta es la ecuación con la que se realizarán los cálculos de los incisos, es decir, es la función que expresa la estatura del bebé con respecto al tiempo.

b) La estatura del bebé recién nacido, es decir, no ha transcurrido ningún mes, $x = 0$
$y = 2(0) + 50$
$y = 0 + 50$
$y = 50$ cm

La estatura del bebé recién nacido son 50 cm

c) Al transcurrir 6 meses, $x = 6$
$y = 2(6) + 50$
$y = 12 + 50$
$y = 62$ cm

La estatura del bebé a los 6 meses son 62 cm

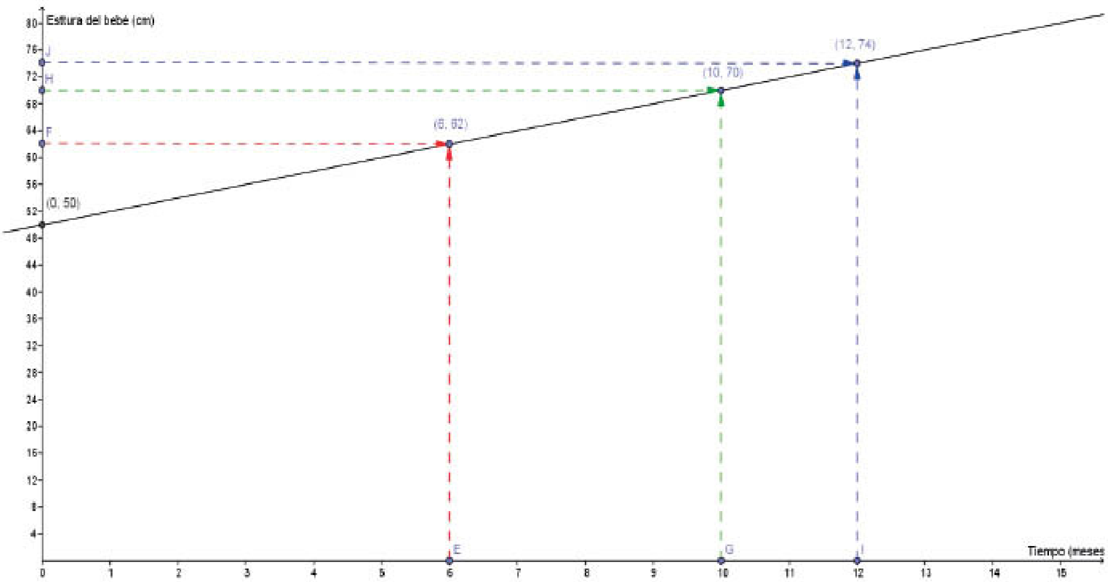
d) En cuánto tiempo el bebé medirá 70 cm, es decir, $y = 70$
$70 = 2x + 50$
Se despeja x
$70 - 50 = 2x$
$\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{2}} = x$
$x = 10$

Por lo que el bebé mide 70 cm a los 10 meses

e) **La estatura del bebé al año de nacido,** es decir, $x = 12$
$y = 2(12) + 50$
$y = 24 + 50$
$y = 74$ cm

La estatura del bebé **al año de nacido** son 74 cm

f) Gráfica



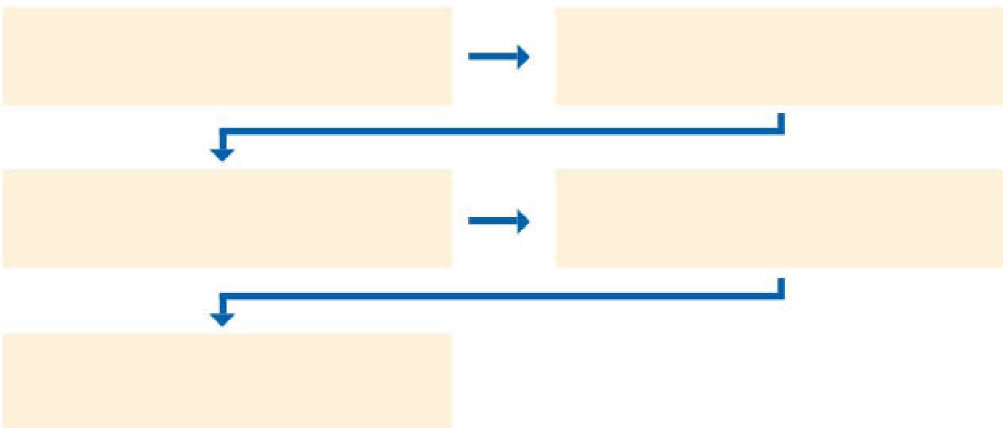
Como te podrás dar cuenta, en esta gráfica salen los valores exactos (son iguales a los que resultaron matemáticamente).

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. Realiza un esquema con el algoritmo para resolver aplicaciones de ecuaciones lineales como modelos matemáticos.



2. Menciona al menos cinco aplicaciones de ecuaciones lineales como modelos matemáticos y de qué manera se dan estas relaciones.

Aplicación	De qué manera se da la relación entre las variables

Resuelve los siguientes ejercicios de aplicaciones de ecuaciones lineales como modelos matemáticos en tu libreta.

3. El costo de producir 60 chamarras de piel es de $7,800, mientras que producir 90 chamarras de piel es $9,300. Si el costo (*c*) varía linealmente con el número de chamarras producidas, determina:

   a) La función que expresa el costo de producir *n* chamarras.
   b) El costo de producir 400 chamarras.
   c) El costo de producir 1,000 chamarras.
   d) La cantidad de chamarras que se pueden producir con $5,000.
   e) La cantidad de chamarras que se pueden producir con $10,000.
   f) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores.

4. El valor de cierto tractor se deprecia linealmente con el tiempo. A los 3 años de uso su precio de venta es de $80,000, mientras que a los 7 años es de $60,000. Si el precio de venta varía linealmente con el tiempo transcurrido, determina:

   a) La función que expresa el precio de venta del tractor en función del tiempo.
   b) El precio de venta del tractor cuando estaba nuevo.
   c) El precio de venta del tractor a los 5 años de uso.
   d) El precio de venta del tractor a los 10 años de uso.
   e) ¿En cuánto tiempo se podrá vender el tractor en $50,000?
   f) ¿En cuánto tiempo el tractor se deprecia por completo?
   g) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores.

5. Cuando se riega con regularidad una planta, tiene un crecimiento lineal. Si la altura de esta planta a los 3 días de sembrada era de 9.5 cm y a los 10 días era de 20 cm y si la altura de la planta varía linealmente con el tiempo transcurrido, determina:

a) La función que expresa la altura de la planta en función del tiempo.
b) La altura de la planta recién sembrada.
c) La altura de la planta a la primera semana de sembrada.
d) La altura de la planta a la segunda semana de sembrada.
e) ¿En cuánto tiempo la altura de la planta será de 23 cm?
f) ¿En cuánto tiempo la altura de la planta alcanzará los 30 cm?
g) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores.

Con la realización de estos ejercicios valora si has logrado aplicar la ecuación de la recta como un modelo matemático, sobre todo si identificas su aplicación en la vida diaria. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Por qué es importante transformar los datos de un problema a un modelo matemático? ¿Qué ventajas encuentras en el hecho de realizar una gráfica de un modelo matemático? Justifica tus respuestas.

Cierre de bloque III

Reflexiona sobre lo aprendido

Responde a los siguientes cuestionamientos.

En este bloque hemos definido a la recta como una sucesión indefinida de puntos; posteriormente revisamos los distintos tipos de ángulos. ¿Recuerdas los tipos de ángulo que hay?: agudo, obtuso, cero y de 90º.

Después, aprendimos la relevancia de la pendiente y los distintos tipos que existen: positiva, negativa, cero e indefinida. ¿Recuerdas un ejemplo en donde apliques el tema de pendiente en una situación de tu vida?

____
____
____

Además; realizaste ejercicios para calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta.

En otro momento revisamos las rectas paralelas y perpendiculares, resolviendo ejercicios para determinar la relación que guardan entre sí dos rectas.

Y finalmente aplicamos la ecuación de la recta como un modelo matemático ubicando la recta en un lugar geométrico.

Evaluación del bloque III

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque III.

Interpretación del nivel de avance:
100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Identificas los conceptos de pendiente de una recta y ángulo de inclinación de una recta, así como los diferentes tipos de pendientes.				
	Reconoces la fórmula de pendiente de una recta.				
	Identificas los tipos de pendientes y ángulos de inclinación, para diseñar problemas de aplicación de pendiente.				
	Defines perpendicularidad y paralelismo de una recta.				
	Identificas la recta como un lugar geométrico y un modelo matemático.				

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menor
Procedimentales	Utilizas el concepto de pendiente de una recta para resolver ejercicios en donde se calcule la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta.				
	Utilizas las condiciones de perpendicularidad y paralelismo para determinar la relación que guardan entre sí dos rectas (si se intersectan o son paralelas).				
	Aplicas la ecuación de la recta como un modelo matemático.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menor
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

____
____
____
____
____

2. ¿Cómo puedes utilizar lo aprendido en el presente y futuro?

____
____
____

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

____
____
____

Recuerda que deberás integrar las respuestas a tu portafolio de evidencias, y anotar número del bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque III

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollado)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructivista congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

BLOQUE IV

Utilizas distintas formas de la ecuación de una recta

Bloque IV

12 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. Ecuación de la recta determinada por uno de sus puntos y su pendiente.
2. Gráfica de una función lineal a partir de su pendiente y ordenada a origen.
3. Ecuación de una recta en forma simétrica.
4. Ecuación general de una recta.
5. Ecuación normal de una recta.
6. Distancia de un punto a una recta.
7. Distancia entre dos rectas paralelas.

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: ejercicios de cálculo de ecuación de una recta dados uno de sus puntos y su pendiente.
- Actividad 2: ejercicios para obtener la gráfica de una función lineal a partir de su pendiente y ordenada al origen.
- Actividad 3: ejercicios para expresar la ecuación de una recta en forma simétrica.
- Actividad 4: ejercicios para expresar la ecuación de una recta en forma general.
- Actividad 5 : ejercicios para expresar la ecuación de una recta en forma normal.
- Actividad 6: ejercicios para calcular la distancia entre un punto y una recta.
- Actividad 7: ejercicios para calcular la distancia entre dos rectas paralelas.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás siete productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.

- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje.

Introducción

En el bloque anterior estudiamos cómo calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de una recta, la relación que guardan entre sí dos rectas y las aplicaciones de la recta como modelos matemáticos.

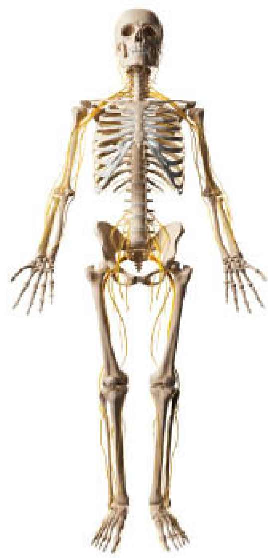
En este bloque aprenderás cómo se calculan la ecuación y la gráfica de una recta. Si tenemos:

- Uno de sus puntos y su pendiente
- La pendiente y la ordenada al origen y,
- Dos puntos.

Además, expresarás la ecuación de la recta en las siguientes formas:

- Forma simétrica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- Forma general: $Ax + By + C = 0$
- Forma normal: $x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta - P = 0$

Este tema es muy interesante y podemos observar su aplicación; por ejemplo, por medio de la ecuación de una recta se determinan diversas situaciones que presentan variaciones lineales, como la estatura de una persona que vivió hace años con base en el tamaño del fémur, los cobros de las compañías de teléfonos que tienen un costo mensual más un tarifa extra por cada llamada, etcétera



¿Con qué propósito?

Reconocerás distintas formas de ecuaciones de la recta y transformarás ecuaciones lineales de una forma a otra, utilizando distintas formas de la ecuación de la recta, para solucionar problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana; asimismo, aprenderás el estudio de las propiedades geométricas de la recta y de sus posibilidades analíticas

Para iniciar, reflexiona

Si vas a la tienda en bicicleta y generalmente tardas 20 minutos; pero un día tuviste que ir caminando. ¿Cómo sabrás cuánto tiempo harías? ¿De qué depende si llegas más o menos rápido?

Vamos a explicar: las distancias pueden modelarse con una ecuación para mostrar la relación entre la velocidad y el tiempo. El cambio en una de estas variables afecta la distancia recorrida. En este bloque reflexionaremos sobre cómo obtener este tipo de ecuaciones.

¿Con qué conocimientos cuento?

Has llegado al cuarto bloque de matemáticas III, y para comprenderlo es conveniente recordar los siguientes temas.

Evaluación diagnóstica.

Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones de los incisos que se muestran enseguida y elabora en tu libro, libreta o cuaderno lo que se te pide.

1. Encuentra la ecuación de la recta que corta los ejes coordenados en los puntos (0,-3) y (4,0)

2. Determina las coordenadas del punto donde la recta $y = -4x - 4$ se intersecta con el eje x y con el eje y.

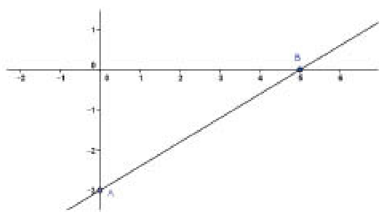
3. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,2) y (5,-2) y exprésala en la forma Ax + By + C = 0

4. Evalúa los valores de x = -3 y y = 2 en la ecuación 3x – 2y – 3 = 0

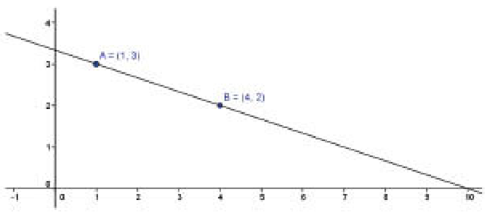
5. Identifica los valores de la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes ecuaciones:
   a) $4x - 2y + 8 = 0$
      pendiente _____
      ordenada _____

   b) $12x + 3y - 15 = 0$
      pendiente _____
      ordenada _____

6. Identifica el valor de la abscisa y la ordenada, ambas al origen, de la siguiente recta:
   abscisa _____
   ordenada _____



7. Encuentra la ecuación de la siguiente recta dados los puntos A y B:



8. Encuentra el valor de los siguientes ángulos:
   a) tan 85° = __________
   b) sen 60° = __________
   c) cos 45° = __________
   d) tan -1 85° = __________

9. Expresa la ecuación $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ en la forma Ax + By + C = 0

10. Despeja la variable dependiente y en la ecuación $8x - 4y + 12 = 0$

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 preguntas considera tu resultado como Bueno, de 5 a 7 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 5 considera tu desempeño como No suficiente, lo cual exige que refuerces tus conocimientos previos, repasa tus apuntes de Matemáticas I y II.

¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando en este bloque los siguientes conceptos: pendiente, abscisa, ordenada.

"El verdadero precio de todas las cosas, lo que todas las cosas cuestan realmente al hombre que quiere adquirirlas, es el esfuerzo y la molestia que supone adquirirlas".

-Adam Smith

Aprende más

Ecuación de la recta determinada por uno de sus puntos y su pendiente

Cuando queremos determinar la ecuación de una recta *r*, que pasa por un punto $P_1(x_1,y_1)$ que tiene una pendiente *m*, si existe un punto $P(x,y)$ cualquiera de la recta y es distinto de P_1, utilizando la fórmula de la pendiente tenemos:

$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ y pasando el término $x - x_1$ que está dividiendo hacia el otro lado

multiplicando, resulta:

$m(x - x_1) = y - y_1$, lo que es lo mismo:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ésta es la ecuación de la recta expresada en su forma punto-pendiente, que se utiliza cuando conocemos un punto de la recta y su pendiente.

Recuerda que la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = mx + b$$

donde:

y = variable dependiente
m = pendiente de la recta
x = variable independiente
b = intersección con el eje de las ordenadas y

Por lo que después de haber sustituido las coordenadas del punto P_1 y la pendiente *m* en la forma punto-pendiente, se pasa la ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen.

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto A(5,6) y cuya pendiente es 3.

Solución

- Se sustituyen las coordenadas del punto A y la pendiente en la forma punto-pendiente:

Ésta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

$$y - 6 = 3(x - 5)$$

- Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha

$$y - 6 = 3x - 15$$

- Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término -6 hacia el lado derecho

$$y = 3x - 15 + 6$$

- Se simplifican los términos semejantes -15 + 6

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = 3x - 9$

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto B(-3,4) y cuya pendiente es -2.

Solución

- Se sustituyen las coordenadas del punto B y la pendiente en la forma punto-pendiente:

$$y - 4 = -2(x - (-3))$$
$$y - 4 = -2(x + 3)$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente.

- Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha

$$y - 4 = -2x - 6$$

- Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término -4 hacia el lado derecho

$$y = -2x - 6 + 4$$

- Se simplifican los términos semejantes -6 + 4

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = -2x - 2$

Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto C(6,-3) y cuya pendiente es $-\frac{2}{3}$.

Solución

- Se sustituyen las coordenadas del punto C y la pendiente en la forma punto-pendiente:

$$y-(-3) = -\frac{2}{3}(x-6)$$

$$y+3 = -\frac{2}{3}(x-6)$$

Esta es la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente

- Se multiplica la pendiente por cada uno de los miembros del paréntesis de la derecha

$$y+3 = -\frac{2}{3}x + \frac{12}{3}$$

- Se pasa a la forma pendiente-ordenada al origen, transponiendo el término +3 hacia el lado derecho

$$y = -\frac{2}{3}x + 4 - 3$$

- Se simplifican los términos semejantes + 4 – 3

La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen es $y = -\frac{2}{3}x + 1$

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya pendiente es 3 y la ordenada al origen es - 4.

Solución

- Se sustituyen los valores de la pendiente (m) y la ordenada al origen (b) en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$

$$y = 3x + (-4)$$

$$y = 3x - 4$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen

Ejemplo 5

Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es 3 y es paralela a la recta cuya ecuación es $y = -4x + 5$

Solución

- Como las rectas son paralelas, el valor de sus pendientes es igual; por lo tanto, el valor de la pendiente de la ecuación de la recta que queremos encontrar también es -4
- Se sustituye este valor y el de b en la ecuación $y = mx + b$

$$y = -4x + 3$$

$$y = -4x + 3$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente ordenada al origen

Ejemplo 6

Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es -4 y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $y = 3x - 6$

Solución

- Como las rectas son perpendiculares, el valor de sus pendientes son recíprocos y de signos contrarios. Por lo tanto, como la pendiente es igual a 3, su recíproco inverso es $-\frac{1}{3}$
- Se sustituye este valor y el de b en la ecuación $y = mx + b$

$$y = -\frac{1}{3}x - 4$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 4$$

Ésta es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen

Ejemplo 7

Determina si las rectas r_1 $y = -2x + 5$ y r_2 $y = \frac{1}{2}x - 3$ son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

- Observamos que la pendiente de la recta r_1 es -2 y de la recta r_2 es $\frac{1}{2}$
- Para que sean paralelas $m_1 = m_2$, y como $-2 \neq \frac{1}{2}$ NO son paralelas.
- Ahora checamos la condición de perpendicularidad, multiplicando ambas pendientes

  $(-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ Como SI se cumple que al multiplicar las pendientes el resultado

  es -1, *las rectas son perpendiculares.*

Ejemplo 8

Determina si las rectas r_1 $y = 3x + 4$ y r_2 $y = \frac{1}{3}x - 2$ son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

- Podemos observar que la pendiente de la recta r_1 es 3 y de la recta r_2 es $\frac{1}{3}$
- Para que sean paralelas $m_1 = m_2$, y como $3 \neq \frac{1}{3}$ NO son paralelas.
- Ahora checamos la condición de perpendicularidad, multiplicando ambas pendientes

  $(3)\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ Como NO se cumple que al multiplicar las pendientes el resultado es -1, las rectas NO son paralelas.

Por lo tanto, las rectas son oblicuas.

Ejemplo 9

Determina si las rectas r_1 $y = 2x - 5$ y r_2 $y = 2x + 3$ son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Solución

- Podemos observar que la pendiente de la recta r_1 es 2 y de la recta r_2 es 2.
- Para que sean paralelas $m_1 = m_2$, y como 2 = 2 *las rectas son paralelas*.

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. La ecuación de la recta en su forma punto-pendiente se expresa como:
____

2. La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen se expresa como:____

3. En la ecuación de la recta pendiente-ordenada al origen, la variable dependiente se representa con la letra _____, la pendiente con la letra _____, la variable independiente con la letra _____, y la intersección con el eje y u ordenada al origen con la letra _____.

4. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto A(-2,4) y cuya pendiente es 2.

5. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto B(5,-3) y cuya pendiente es -3.

6. Encuentra la ecuación de la recta en sus formas punto-pendiente y pendiente-ordenada al origen, que pasa por el punto C(-3,-6) y cuya pendiente es $\frac{3}{2}$

7. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya pendiente es -4 y la ordenada al origen es 5.

8. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es -3 y es paralela a la recta cuya ecuación es $y = 6x + 4$

9. Encuentra la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, cuya ordenada es 5 y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $y = -5x + 10$

10. Determina si las rectas r_1 $y = -4x + 3$ y r_2 $y = -4x + 5$ son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

11. Determina si las rectas r_1 $y = 6x - 4$ y r_2 $y = \frac{1}{6}x + 2$ son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

12. Determina si las rectas r_1 $y = -5x + 3$ y r_2 $y = \frac{1}{5}x - 4$ son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si eres capaz de obtener la ecuación de la recta a partir de su punto-pendiente.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Cuál es la manera más sencilla de ubicar si 2 rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas? Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____
____
____

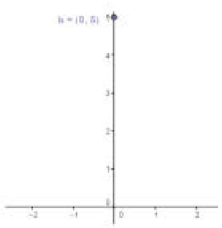
Aprende más

Gráfica de una función lineal a partir de su pendiente y ordenada al origen

Para trazar la gráfica de una función lineal, se utilizan los parámetros *b* y *m* de la ecuación $y = mx + b$, mediante el siguiente algoritmo:

Ejemplo 10.

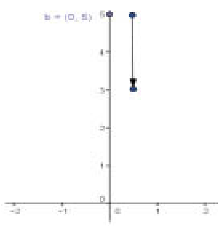
Paso 1 Se identifican la pendiente (-2) y la ordenada al origen (5).



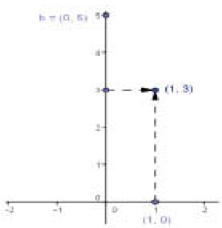
Paso 2 Se ubica en un plano cartesiano la intersección con el eje *y* (5), con coordenadas (0,5). La pendiente se define como:

$$m = \frac{\text{cambio vertical (elevación)}}{\text{cambio horizontal (recorrido o desplazamiento)}} = \frac{-2}{1}$$

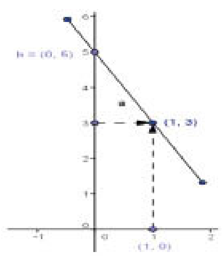
por lo que en este ejemplo la pendiente baja 2 unidades en *y* cada que *x* se desplaza una unidad.



Paso 3 Como el cambio vertical fue -2, nos desplazamos 2 unidades hacia abajo, con lo que llegamos al punto (0,3).



Paso 4 A partir del punto (0,3) nos desplazamos un lugar a la derecha, ya que el desplazamiento horizontal fue de 1. Con este desplazamiento llegamos al punto (1,3).



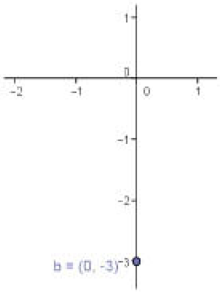
Paso 5 Se unen los puntos formados por la ordenada al origen (0,5) y el desplazamiento (1,3), con lo cual se forma la recta que pertenece a la ecuación $y = -2x + 5$.

Ejemplo 11

Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = \frac{4}{3}x - 3$

Solución

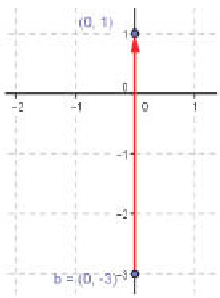
Paso 1 Se identifican la pendiente $(\frac{4}{3})$ y la ordenada al origen (-3).



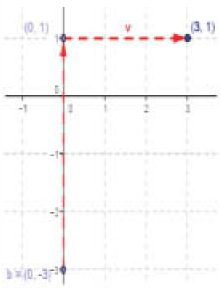
Paso 2 Se ubica en un plano cartesiano la intersección con el eje *y* (-3), con coordenadas (0,-3). La pendiente se define como:

$$m = \frac{\text{cambio vertical (elevación)}}{\text{cambio horizontal (recorrido o desplazamiento)}} = \frac{4}{3}$$

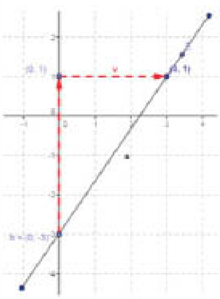
por lo que en este ejemplo la pendiente sube 4 unidades en *y* cada que *x* se desplaza tres unidades.



Paso 3 Como el cambio vertical fue 4, nos desplazamos 4 unidades hacia arriba, con lo que llegamos al punto (0,1).



Paso 4 A partir del punto (0,1) nos desplazamos tres lugares a la derecha, ya que el desplazamiento horizontal fue de 3. Con este desplazamiento llegamos al punto (3,1).



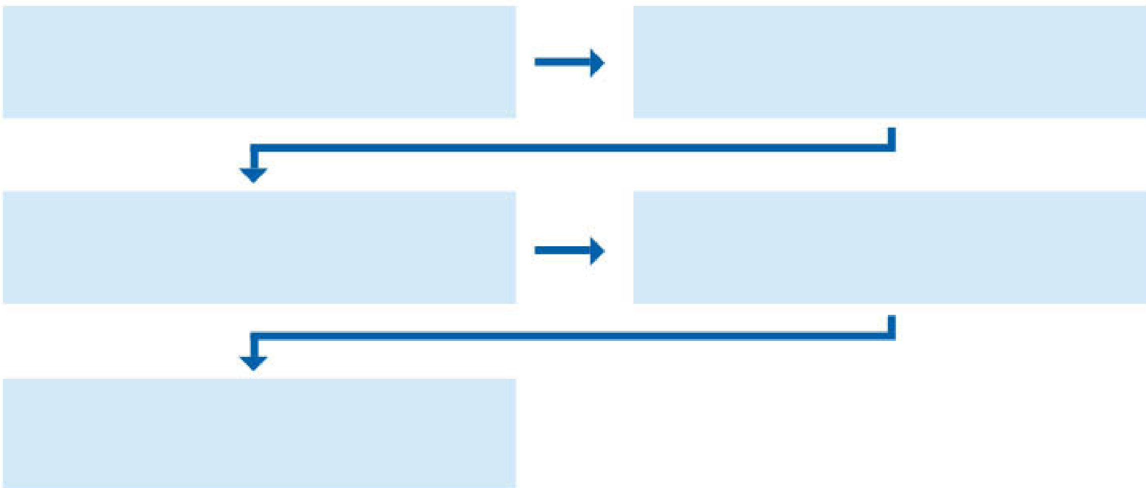
Paso 5 Se unen los puntos formados por la ordenada al origen (0,-3) y el desplazamiento (3,1), con lo que se forma la recta que pertenece a la ecuación $y = \frac{4}{3}x - 3$.

Aplica lo aprendido

Actividad 2

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. Realiza un mapa conceptual con el algoritmo para trazar la gráfica de una recta, a partir de su pendiente y ordenada al origen.



Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

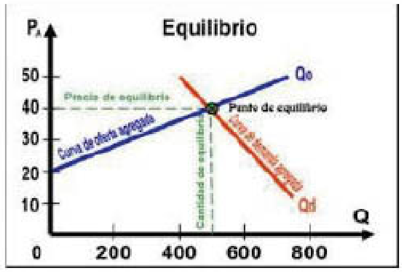
2. Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = -5x + 2$

3. Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = 3x - 4$

4. Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es $y = \frac{3}{2}x + 3$

Sabías que...

En la práctica, algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en un intervalo. En el análisis económico sólo se toma la porción de las rectas lineales que se encuentran en el primer cuadrante, ya que la oferta, el precio y la demanda son cero o positivas. Tales postulados se deben a Adam Smith, padre de la economía.



Con la realización de estos ejercicios podrás *identificar su obtienes la ecuación de una recta a partir de su pendiente y la ordenada al origen*. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

¿Qué ocurrirá si en un mismo sistema de coordenadas se traza la ecuación $y = mx + b$, dando diferentes valores a b, tanto positivos y negativos? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Aprende más

Ecuación de una recta en forma simétrica

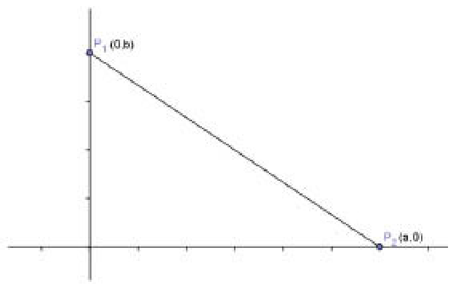
En los temas anteriores aprendiste a calcular la ecuación de la recta cuando se conocen dos de sus condiciones: un punto y la pendiente. Las formas que calculaste fueron:

- Forma pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$
- Forma punto pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Forma simétrica

Cuando conocemos las intersecciones de la recta con los ejes coordenados, podemos expresarla en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, donde:
a es el valor de la abscisa en el origen, que es el valor de *k* cuando $y = 0$;
b es el valor de la ordenada al origen, que es el valor de *y* cuando $x = 0$.

Esto lo observamos en la siguiente figura:



De esta figura calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{0 - b}{a - 0} = \frac{-b}{a}$$

Ahora sustituimos el valor de la pendiente y el punto P_1 en la forma punto- pendiente:

$$y - b = \frac{-b}{a}(x - 0) \qquad y - b = \frac{-bx}{a}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por *a* para quitarla del denominador del lado derecho:

$$a(y - b) = \frac{-bx}{\cancel{a}}(\cancel{a}) \qquad ay - ab = -bx$$

Y pasando $-bx$ al lado izquierdo y *ab* a la derecha: $ay + bx = ab$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre *ab*: $\frac{\cancel{a}y}{\cancel{a}b} + \frac{\cancel{b}x}{a\cancel{b}} = \frac{\cancel{ab}}{\cancel{ab}}$

Resulta $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$, lo que es lo mismo $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, que es la forma simétrica de la recta.

Ejemplo 12

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $y = 3x - 6$

Solución

Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de $y = 0$
$0 = 3x - 6 \quad 6 = 3x \quad \frac{6}{3} = x \quad x = 2 \quad a = 2$

Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de $x = 0$
$y = 3(0) - 6 \quad y = 0 - 6 \quad y = -6 \quad b = -6$

Se sustituyen estos valores en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$

Ejemplo 13

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $8x - 2y - 16 = 0$

Solución

Se pasa primero a la forma $y = mx + b \qquad -2y = -8x + 16 \quad y = \frac{-8x + 16}{-2} \qquad y = 4x - 8$

Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de $y = 0$

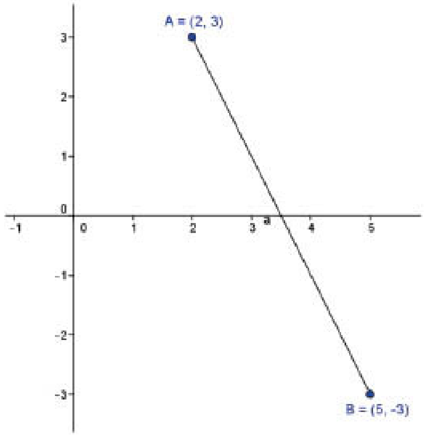
$0 = 4x - 8 \quad 4x = 8 \quad \frac{8}{4} = x \quad x = 2 \quad a = 2$

Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de x = 0

$y = 4(0) - 8 \quad y = 0 - 8 \quad y = -8 \quad b = -8$

Ejemplo 14

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados en la gráfica.



Solución

Se calcula la pendiente: $m = \frac{-3 - 3}{5 - 2} = \frac{-6}{3}$ $\quad m = -2$

Se sustituye esta valor junto con las coordenadas del punto 1:

$y - 3 = -2(x - 2)$ $\qquad y - 3 = -2x + 4$ $\qquad y = -2x + 4 + 3$ $\qquad y = -2x + 7$

Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de $y = 0$

$0 = -2x + 7$ $\qquad 2x = 7$ $\qquad \frac{7}{2} = x$ $\qquad x = 3.5$ $\qquad a = 3.5$

Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de x = 0

$y = -2(0) + 7$ $\qquad y = 0 + 7$ $\qquad y = 7$ $\qquad b = 7$

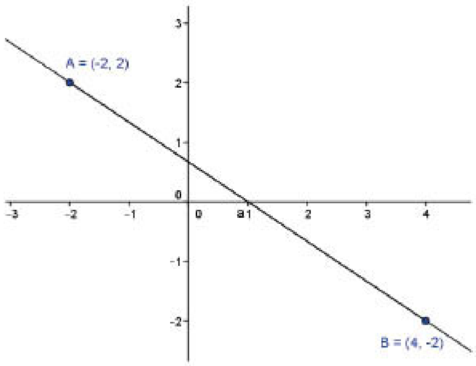
Se sustituyen estos valores en la forma $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\qquad \frac{x}{3.5} + \frac{y}{7} = 1$

Aplica lo aprendido

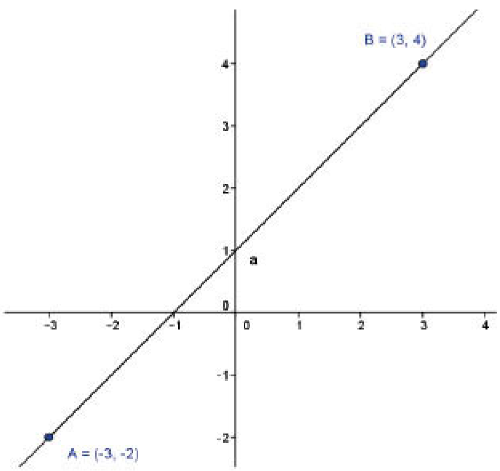
Actividad 3

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $y = 5x - 10$
2. Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $y = 2x - 12$
3. Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $16x + 4y + 20 = 0$
4. Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta $12x + 6y - 18 = 0$
5. Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



6. Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si eres capaz de aplicar el concepto de simetría en una ecuación.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

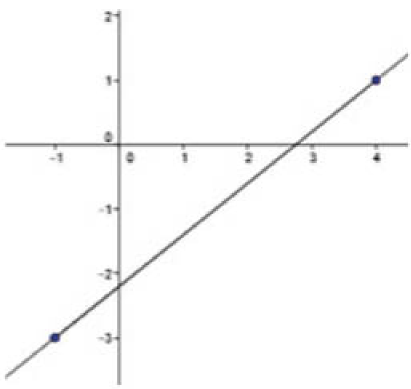
¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero lo siguiente:

a) Cómo determinar la abscisa en el origen y la ordenada al origen de la recta $y = 3x - 6$. Justifiquen sus respuestas.

____
____
____
____
____

b) Cómo determinar la abscisa en el origen y la ordenada al origen de la recta de la siguiente figura:



____
____
____
____

Aprende más

Ecuación general de una recta.

La ecuación cuya forma es $Ax + By + C = 0$ se llama forma general de la recta, donde A, B y C son números reales, y los valores de A y B no pueden ser cero.

Ejemplo 15

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3,2) y tiene una pendiente de -0.5

Solución

Se sustituyen el valor de la pendiente y el punto en la ecuación de la forma punto pendiente:

$y - 2 = -0.5[x - (-3)]$

$y - 2 = -0.5(x + 3)$

$y - 2 = -0.5x - 1.5$

Se pasan todos los términos del lado izquierdo para que quede el valor de x positivo:

$y - 2 + 0.5x + 1.5 = 0$

$0.5x + y - 0.5 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

Ejemplo 16

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-4,-4) y B(1,6).

Solución

Se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{-4 - 6}{-4 - 1} = \frac{-10}{-5}$ $m = 2$

Se sustituyen las coordenadas del punto A y el valor de la pendiente en la ecuación de la forma punto pendiente:

$y - (-4) = 2[x - (-4)]$

$y + 4 = 2(x + 4)$

$y + 4 = 2x + 8$

Se pasan todos los términos del lado derecho para que quede el valor de x positivo:

$2x + 8 - y - 4 = 0$

$2x - y + 4 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

Ejemplo 17

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

Solución

Se calcula el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores 3 y 4;   mcm = 12

Se multiplican ambos miembros de la ecuación original por el mcm:

$12\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) = 1(12) \qquad \frac{12x}{3} + \frac{12y}{4} = 12 \qquad 4x + 3y = 12$

$4x + 3y - 12 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma general.

Determinación de la pendiente y la ordenada al origen a partir de la ecuación general

Despejamos la variable y de la ecuación general de la recta, cuya forma es $Ax + By + C = 0$, siendo A y B diferentes de cero:

$By = -Ax - C \qquad y = \frac{-Ax - C}{B} \qquad y = \frac{-Ax}{B} - \frac{C}{B}$

Esta es la ecuación de la recta en la forma pendiente ordenada al origen:

$y = mx + b$, por lo que:

Ejemplo 18

Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x - 4y - 6 = 0$

Solución

Se identifican los valores de A, B y C de la forma general:

$A = 3$, $B = -4$ y $C = -6$

Se sustituyen en los valores de m y b:

$m = \frac{-3}{-4} \qquad b = \frac{-6}{-4}$ Simplificando términos y signos resulta:

La pendiente es $m = \frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es $b = \frac{3}{2}$

Ejemplo 19

Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $-8x + 2y + 12 = 0$

Solución

Se identifican los valores de A, B y C de la forma general:

$A = -8$, $B = 2$ y $C = 12$

Se sustituyen en los valores de m y b:

$$m = \frac{-(-8)}{2} = \frac{8}{2} \qquad b = \frac{12}{2}$$

Simplificando términos y signos resulta:

La pendiente es $m = 4$ y la ordenada al origen es $b = 6$

Aplica lo aprendido

Actividad 4

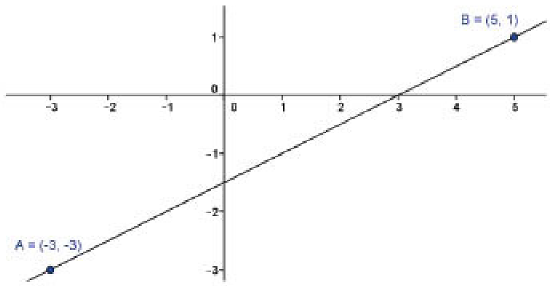
Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (4,2) y tiene una pendiente de -2

2. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,4) y tiene una pendiente de 3.

3. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-3,-2) y B(5,2)

4. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



5. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$

6. Encuentra la forma general de la ecuación de la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1$

7. Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $8x - 4y - 20 = 0$

8. Determina la pendiente y la ordenada al origen de la recta $-9x + 3y + 15 = 0$

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar obtienes la forma general de una ecuación y determinas la pendiente y la ordenada al origen de una recta.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero lo siguiente, justificando tus respuestas:

a) Cómo determinar la forma general de la ecuación de la recta que pasa por un punto (x,y) y tiene una pendiente de m.

b) Cómo determinar la forma general de la ecuación de la recta que pasa por un punto $A(x_1,y_1)$ y un punto $B(x_2,y_2)$

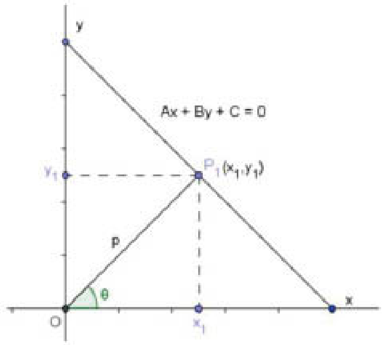
c) Cómo determinar la forma general de la ecuación de la recta a partir de la ecuación de la recta en su forma simétrica.

d) Cómo determinar la pendiente y la ordenada al origen a partir de la ecuación general.

Aprende más

Ecuación normal de una recta

Observa la siguiente figura:



Sea $\overline{OP_1}$ un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$, cuya longitud es p y θ es el ángulo determinado por el segmento $\overline{OP_1}$ y el eje coordenado x.

De la figura se obtiene: $\text{sen}\,\theta = \frac{\text{co}}{h} = \frac{y_1}{p}$ y despejando y_1 tenemos: $y_1 = p\,\text{sen}\,\theta$

$\cos\theta = \frac{\text{ca}}{h} = \frac{x_1}{p}$ y despejando x_1 tenemos: $x_1 = \text{p}\cos\theta$

La pendiente del segmento $\overline{OP_1}$ es $m = \tan\theta = \frac{y_1}{x_1} = \frac{p\,\text{sen}\,\theta}{p\cos\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

Las coordenadas de P_1 se convierten ahora en $P_1(\text{p}\cos\theta,\ \text{p}\,\text{sen}\,\theta)$

Y la pendiente de la recta $Ax + By + C = 0$ es perpendicular al segmento $\overline{OP_1}$, por lo que será inversa y de signo contrario, resultando: $m = -\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

Al sustituir la pendiente y las coordenadas del punto P_1 en la forma pendiente ordenada al origen: $y - p\,\text{sen}\,\theta = -\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}(x - \text{p}\cos\theta)$

Pasando el denominador de la pendiente, multiplicando del lado izquierdo y realizando las multiplicaciones del lado derecho:

$\text{sen}\,\theta(y - \text{p}\,\text{sen}\,\theta) = -\cos\theta(x - p\cos\theta)$

$y\,\text{sen}\,\theta - p\,\text{sen}^2\theta = -x\cos\theta + p\cos^2\theta$

Pasamos todos los términos del lado izquierdo:

$y\,\text{sen}\,\theta - p\,\text{sen}^2\theta + x\cos\theta - p\cos^2\theta = 0$

Factorizando p:

$x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta - p(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 0$

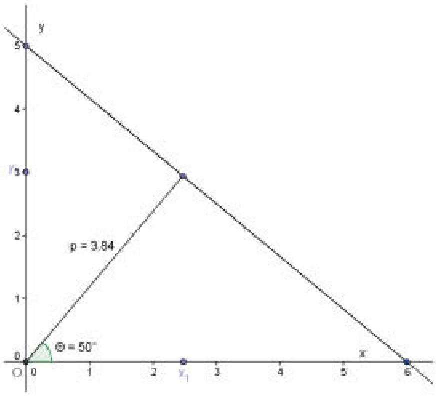
Recuerda que por identidades trigonométricas $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta - p(1) = 0$

$x\cos\theta + y\,\text{sen}\theta - p = 0$ Ésta sería la ecuación normal de la recta.

Ejemplo 20

Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



Solución

Se sustituyen el valor de p y el ángulo en la fórmula $x\cos\theta + y\text{sen}\theta - p = 0$

$x\cos 50° + y\text{sen } 50° - 3.84 = 0$

Se calculan los valores de las funciones trigonométricas cos y sen:

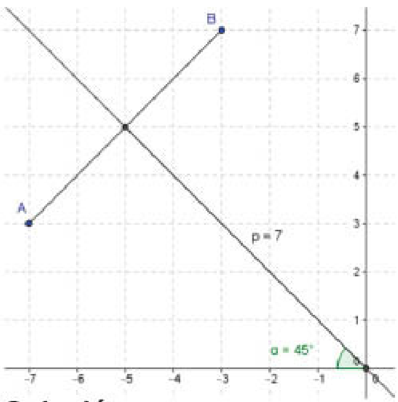
$x(0.6428) + y(0.7660) - 3.84 = 0$

Se realizan las multiplicaciones:

$0.6428x + 0.7660y - 3.85 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma normal.

Ejemplo 21

Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



Solución

Se sustituyen el valor de p y el ángulo en la fórmula $x\cos\theta + y\text{sen}\theta - p = 0$

$x\cos 45° + y\text{sen } 45° - 7 = 0$

Se calculan los valores de las funciones trigonométricas cos y sen:

$x(0.7071) + y(0.7071) - 7 = 0$

Se realizan las multiplicaciones:

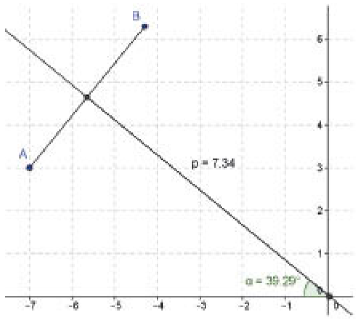
$0.7071x + 0.7071y - 7 = 0$ Ésta es la ecuación en su forma normal.

Aplica lo aprendido

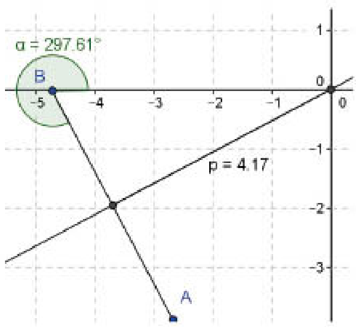
Actividad 5

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

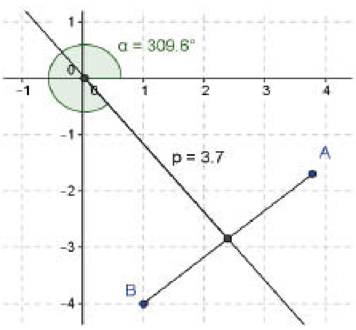
1. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



2. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



3. Encuentra la forma normal de la ecuación de la recta de la siguiente figura:



Con la realización de estos ejercicios reflexiona sobre qué dificultades tuviste para encontrar la forma normal de una ecuación de la recta. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero cómo determinar la forma normal de la ecuación de la recta que es perpendicular a ella, de longitud p y con un ángulo de inclinación θ. Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____
____
____

Aprende más

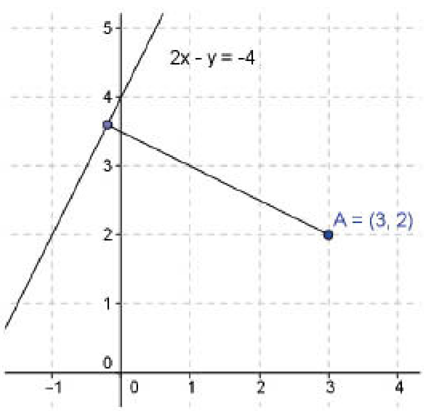
Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia dirigida de un punto $P_1(x_1,y_1)$ a una recta r determinada por la ecuación $Ax + By + C = 0$ se utiliza la fórmula: $d = \left|\dfrac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$

La distancia d es la longitud del segmento de recta perpendicular dirigido de la recta r al punto $P_1(x_1,y_1)$. Dicha distancia será positiva si el punto se encuentra por encima de la recta, y negativo si se encuentra por debajo de la recta. El signo de d será igual al signo de B.

Ejemplo 22

Encuentra la distancia dirigida del punto P(3,2) a la recta $2x - y + 4 = 0$



Solución

Se identifican los valores de $A = 2$, $B = -1$ y $C = 4$ de la ecuación de la recta $2x - y + 4 = 0$

Y del punto P se obtienen los valores de $x = 3$ y de $y = 2$

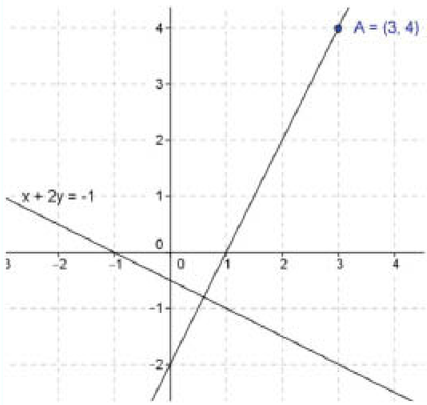
Se sustituyen dichos valores en la fórmula para encontrar la distancia del punto a la recta:

$$d = \left|\frac{2(3)-1(2)+4}{\pm\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{6-2+4}{\pm\sqrt{4\ +1}}\right| = \left|\frac{8}{\pm\sqrt{5}}\right| \quad d = 3.58$$

Como el punto está debajo de la recta, el valor de d será negativo: $d = -3.58$

Ejemplo 23

Encuentra la distancia dirigida del punto $P(3,4)$ a la recta $x + 2y + 1 = 0$



Solución

Se identifican los valores de $A = 1$, $B = 2$ y $C = 1$ de la ecuación de la recta $x + 2y + 1 = 0$

Y del punto P se obtienen los valores de $x = 3$ y de $y = 4$

Se sustituyen dichos valores en la fórmula para encontrar la distancia del punto a la recta:

$$d = \left|\frac{1(3)+2(4)+1}{\pm\sqrt{(1)^2+(2)^2}}\right| = \left|\frac{3+8+1}{\pm\sqrt{1\ +4}}\right| = \left|\frac{12}{\pm\sqrt{5}}\right| \quad d = 5.37$$

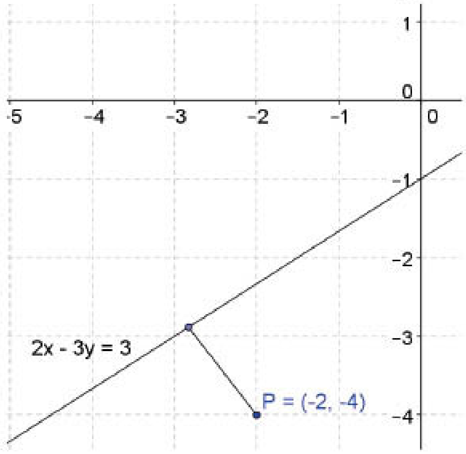
Como el punto está debajo de la recta, el valor de d será negativo: $d = 5.37$

Aplica lo aprendido

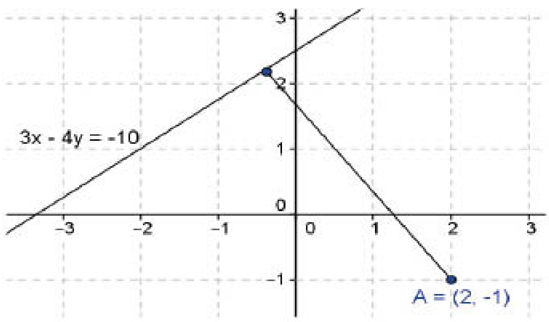
Actividad 6

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

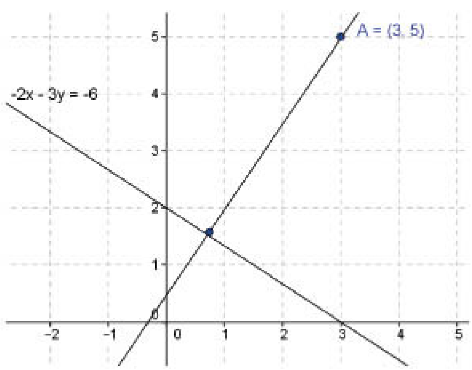
1. Encuentra la distancia dirigida del punto **P**(-2,4) a la recta $2x – 3y – 3 = 0$



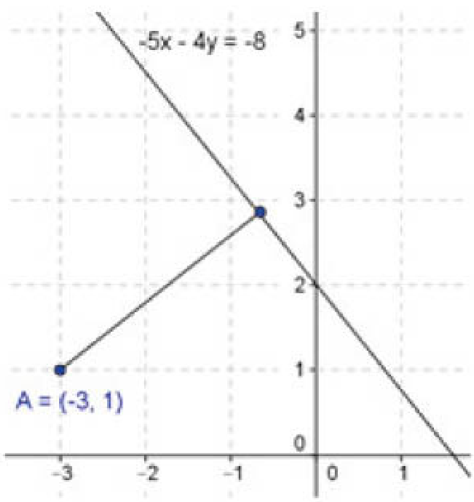
2. Encuentra la distancia dirigida del punto $P(2,-1)$ a la recta $3x - 4y + 10 = 0$



3. Encuentra la distancia dirigida del punto $P(3,5)$ a la recta $-2x - 3y + 6 = 0$



4. Encuentra la distancia dirigida del punto $P(-3,1)$ a la recta $-5x - 4y + 8 = 0$



Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si obtienes la distancia de un punto a una recta.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero cómo determinar la distancia de un punto a una recta. Justifica tu respuesta.

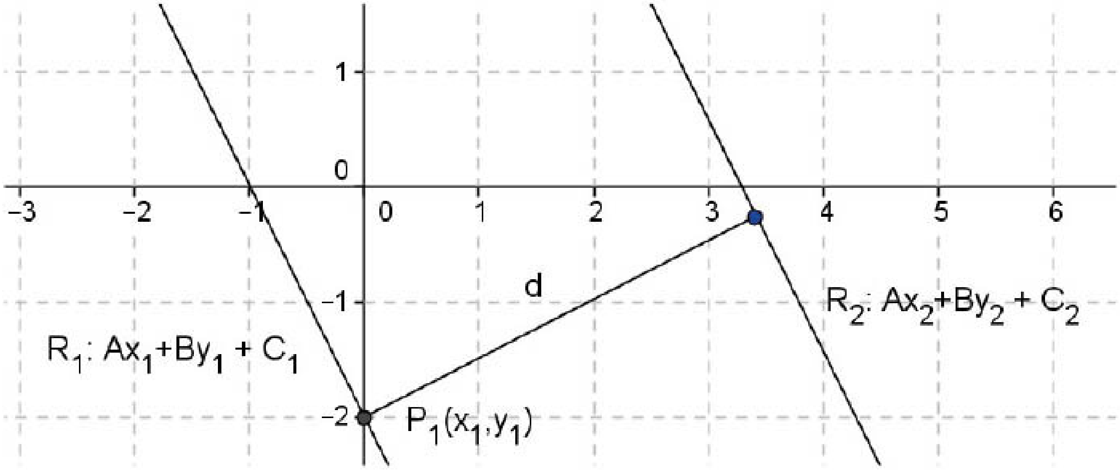
Aprende más

Distancia entre dos recta paralelas

Para calcular la distancia no dirigida entre dos rectas paralelas, llamadas $R1$ y $R2$ respectivamente, hay que determinar un punto que pertenezca a una de las rectas, asignando a x un valor de 0 para encontrar el valor correspondiente de y, realizando el despeje correspondiente.

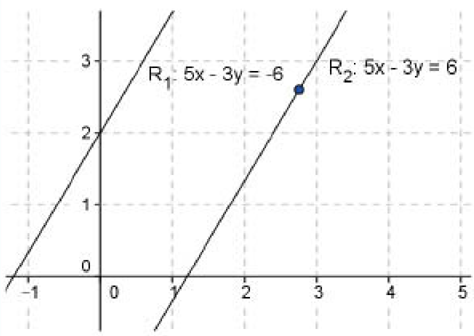
Enseguida, con este punto y la recta $R2$ se procede a encontrar la distancia de este punto a la recta, con la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

Cuando se calcula la distancia entre dos rectas paralelas, el signo indica cuál de las rectas está arriba de la otra y solamente se considera que la distancia entre las rectas es una distancia no dirigida y se calcula con el valor absoluto, por eso el resultado es positivo.



Ejemplo 24

Encuentra la distancia dirigida entre las rectas mostradas en la figura.



Solución

Se determina un punto que esté en una de las rectas, haciendo $x = 0$ y sustituyéndolo en la recta R_1:

$5(0) – 3y = -6$

Se obtiene el valor de y:

$0 – 3y = -6 \quad y = \frac{-6}{-3} \qquad y = 2$

Por lo que el punto (0,2) está en la recta R_1.

Se identifican los valores de $A = 5$, $B = -3$ y $C = -6$

de la ecuación de la recta R_2: $x + 2y + 1 = 0$.

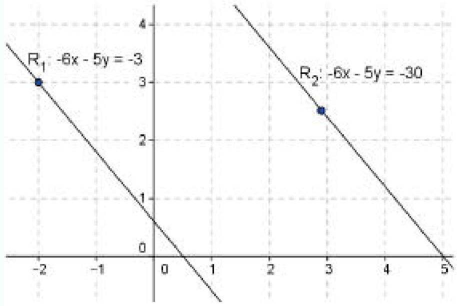
Del punto P se obtienen los valores de $x = 0$ y de $y = 2$

Se toma este punto y la recta R_2 para determinar la distancia entre las dos rectas paralelas, sustituyéndolos en la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$$d = \left|\frac{5(0) - 3(2) - 6}{\pm\sqrt{(5)^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{0 - 6 - 6}{\pm\sqrt{25 + 9}}\right| = \left|\frac{-12}{\pm\sqrt{34}}\right| \qquad d = |-2.06| \qquad d = 2.06$$

Ejemplo 25

Encuentra la distancia dirigida entre las rectas mostradas en la figura.



Solución

Se determina un punto que esté en una de las rectas, haciendo $x = 0$ y sustituyéndolo en la recta R_1: $-6(0) - 5y = -3$

Se obtiene el valor de y:

$0 - 5y = -3 \quad y = \frac{-3}{-5} \qquad y = 0.6$

Por lo que el punto (0,0.6) está en la recta R_1.

Se identifican los valores de A=-6, B=-5 y C=30 de la ecuación de la recta

R_2: $-6x - 5y + 30 = 0$.

Del punto P se obtienen los valores de $x = 0$ y de $y = 0.6$

Se toma este punto y la recta R_2 para determinar la distancia entre las dos rectas paralelas, sustituyéndolos en la fórmula de distancia de un punto a una recta:

$d = \left|\frac{-6(0) - 5(0.6) + 30}{\pm\sqrt{(-6)^2 + (-5)^2}}\right| = \left|\frac{0 - 3 + 30}{\pm\sqrt{36 + 25}}\right| = \left|\frac{27}{\pm\sqrt{61}}\right| \qquad d = |3.46| \qquad d = 3.46$

El signo positivo indica cuál de las rectas está arriba de la otra y solamente se considera que la distancia entre las rectas es una distancia no dirigida y se calcula con el valor absoluto, por eso el resultado es positivo.

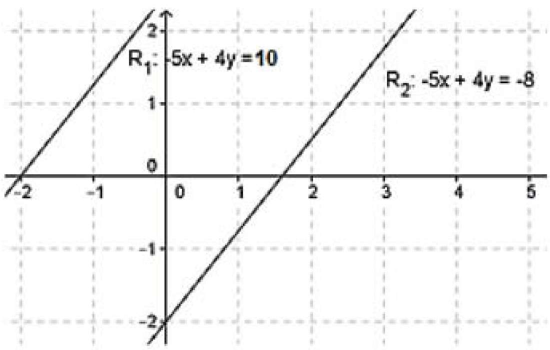
Aplica lo aprendido

Actividad 7

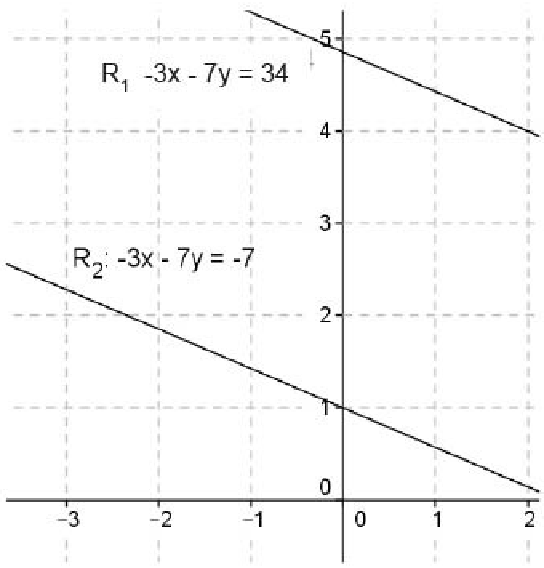
Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas para que, después las comentes con tus compañeros de clase; también escucha las aportaciones de los demás para mejorar tu trabajo.

Encuentra la distancia dirigida entre las rectas de las figuras:

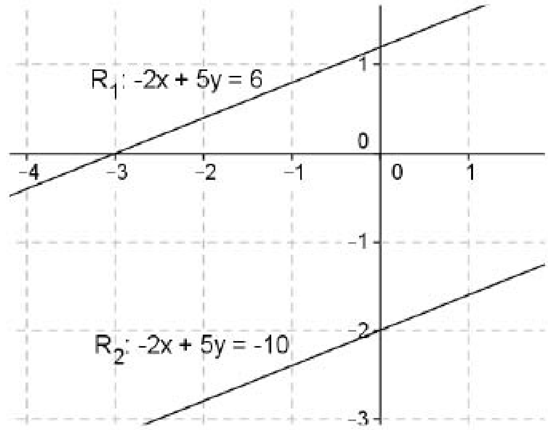
1.



2.



3.



Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si obtienes la distancia entre dos rectas paralelas.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero cómo determinar la distancia entre dos rectas paralelas. Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

____

____

____

____

Cierre de bloque IV

Reflexiona sobre lo aprendido

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque IV.

Interpretación del nivel de avance:
100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Comprendes el proceso para la obtención de la ecuación de una recta a partir de la pendiente y la ordenada al origen.				
Conceptuales	Comprendes el proceso para la obtención de la ecuación de una recta a partir de la pendiente y un punto que pertenezca a dicha recta.				
Conceptuales	Comprendes el proceso para la obtención de la ecuación de una recta a partir de la abscisa y la ordenada al origen.				
Conceptuales	Comprendes el proceso para la transformación de la ecuación normal de la recta a partir de la ecuación general de la recta.				
Conceptuales	Comprendes el proceso para la obtención de la distancia de un punto dado a una recta.				
Conceptuales	Comprendes el proceso para la obtención de la distancia entre dos rectas paralelas.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Obtienes la ecuación de una recta a partir de la pendiente y la ordenada al origen.				
	Obtienes la ecuación de una recta a partir de la pendiente y un punto que pertenezca a dicha recta.				
	Obtienes la ecuación de una recta a partir de dos puntos que pertenezcan a dicha recta.				
	Obtienes la ecuación de una recta a partir de la abscisa y la ordenada al origen.				
	Obtienes la ecuación normal de la recta a partir de la transformación de la ecuación general de la recta.				
	Obtienes la distancia entre un punto cualquiera y una recta.				
	Obtienes la distancia entre dos rectas paralelas.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

____

____

____

____

____

2. ¿Cómo puedes utilizar de lo aprendido en el presente y el futuro?

____

____

____

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

____

____

____

Recuerda que deberás integrar las respuestas a tu portafolio de evidencias, y anotar número del bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque IV

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollado)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructivista congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

BLOQUE V

Aplicas los elementos y las ecuaciones de una circunferencia

Bloque V

14
HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. Secciones cónicas
2. La circunferencia y sus elementos
3. Ecuación de la circunferencia en distintas formas:
   a) canónica
   b) ordinaria
   c) general
   g) dados 3 puntos

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: elementos de la circunferencia y su aplicación
- Actividad 2: ecuaciones de las circunferencia en distintas formas: canónica, ordinaria, general, dados tres puntos y su aplicación.

La resolución de los ejercicios formará parte del portafolio de evidencias.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás dos productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.

- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje

Introducción

En el bloque anterior estudiamos las distintas formas de expresar la ecuación de una recta, cómo calcular la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas paralelas.

En este bloque aprenderás a:

- Identificar y distinguir los diferentes tipos de rectas y segmentos asociados con la circunferencia.
- Reconocer los tipos de ecuaciones de la circunferencia y las transformaciones de una forma a otra.
- Aplicar los elementos y las ecuaciones de la circunferencia en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

La circunferencia es un elemento geométrico de mucha importancia. Está presente en todas partes, gracias a ella se pueden realizar muchas técnicas de gran precisión en una diversidad de productos.

Muchos objetos que utilizamos frecuentemente utilizan la circunferencia de manera precisa para su buen funcionamiento, por ejemplo, un reloj, una llanta, una moneda; todos estos objetos se fabrican utilizando adecuadamente las medidas del radio y del diámetro, pues una falla haría que no quedaran bien. Las partes deben estar perfectamente divididas y las medidas tienen que ser exactas, ya que si existe alguna falla, por muy pequeña que sea, la circunferencia no será perfecta y estos objetos no servirían para lo que se utilizan.

¿Con qué propósito?

Identificas y distingues los diferentes tipos de rectas y segmentos asociados con la circunferencia; así como, reconocer las diferentes ecuaciones de la circunferencia y las transformes de una forma a otra, para que puedas aplicar tus aprendizajes en la solución de problemas de la vida diaria.

Para iniciar, reflexiona

Explica dos ejemplos donde observas la importancia del uso de la circunferencia.

____

____

____

____

¿Con qué conocimientos cuento?

Has llegado al bloque V de Matemáticas III, y para comprenderlo es conveniente recordar los siguientes temas.

Evaluación diagnóstica.

Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones de los incisos que se muestran enseguida y elabora tu libro, libreta o cuaderno lo que se te pide en.

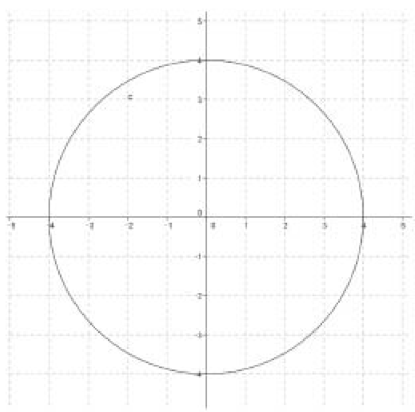
1. ¿Es lo mismo círculo que circunferencia? Justifica tu respuesta.

____

____

____

2. Determina el área y el perímetro de la siguiente circunferencia.



3. Los puntos extremos de uno de los diámetros de una circunferencia son $A(-4,-4)$ y $B(10,-6)$. Encuentra las coordenadas del centro y el valor del radio.

4. Desarrolla el siguiente binomio: $(x - 6)^2 =$

5. Desarrolla el siguiente binomio: $(y + 9)^2 =$

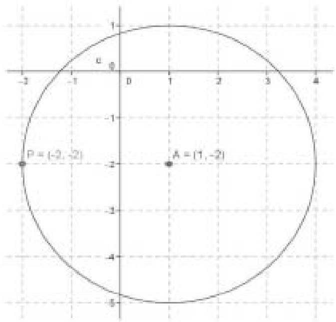
6. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones calculando los valores de *x, y, z,* utilizando el método de suma y resta:

$$2x - 3y - 5z = -19$$
$$3x - 4y + z = -2$$
$$x + y + z = 6$$

7. Realiza el siguiente desarrollo y simplifica términos semejantes, pasando todos l los términos del lado izquierdo.

$$(x - 8)^2 + (y + 7)^2 = 4$$

8. Encuentra el radio de la circunferencia de la siguiente figura, dados su centro (*C*) y uno de los extremos de su diámetro (*P*).



Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 7 a 8 preguntas considera tu resultado como Bueno, de 5 a 6 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 5 considera tu desempeño como No suficiente, lo cual exige que refuerces tus conocimientos previos, repasando tus apuntes de Matemáticas I y II.

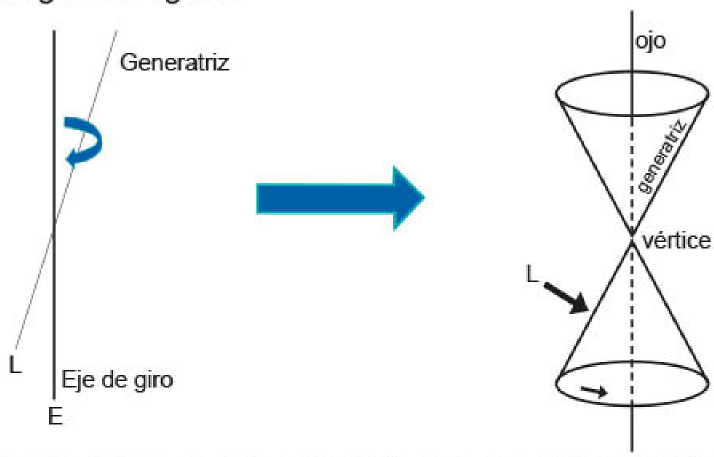
¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Ahora que ya te has dado cuenta de tus fortalezas y oportunidades, refuerza tus conocimientos consultando en este bloque los siguientes conceptos: *círculo, circunferencia, área, perímetro.*

Aprende más

Secciones cónicas

El término cónica se deriva de la palabra *cono*, que en geometría es una figura que puede formarse a partir de una recta que se hace girar con respecto a un eje, como se muestra en la siguiente figura:



El cono circular recto doble es una superficie que se obtiene al girar la generatriz (recta generadora L) alrededor de otra recta o eje (E), manteniendo siempre el mismo ángulo de giro entre ambas rectas.

Las cónicas, o también llamadas secciones cónicas, son curvas que se forman cuando un cono doble circular recto se intersecta con un plano. Son lugares geométricos donde es constante un conjunto de todos los puntos en el plano cuya razón de distancia no dirigida a un punto y una recta fijos.

Dicha razón constante se llama excentricidad de la cónica, que se simboliza con la letra *e*. El punto fijo se llama eje de la cónica y la recta fija se llama directriz.

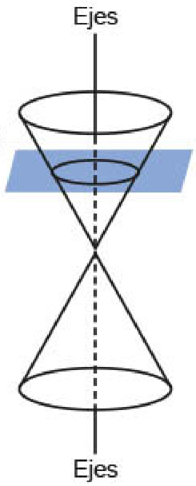
Si la directriz:

- $e = 1$, la cónica es una parábola
- $e < 1$, la cónica es una elipse
- $e > 1$, la cónica es una hipérbola

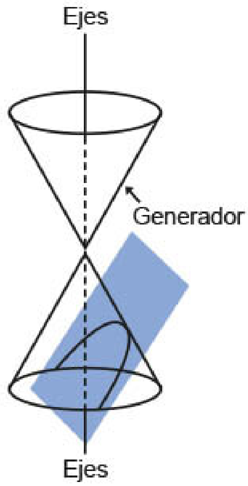
La recta perpendicular a la directriz que pasa por un foco de la cónica se llama eje de la cónica.

Los puntos de intersección de las dos partes del manto con el eje de la misma se denominan vértices.

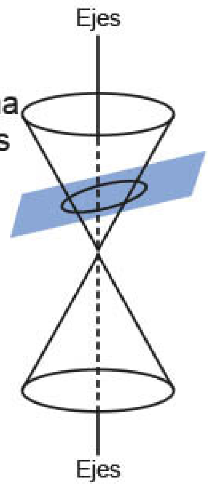
Si el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje del cono, la sección que se forma es una circunferencia.



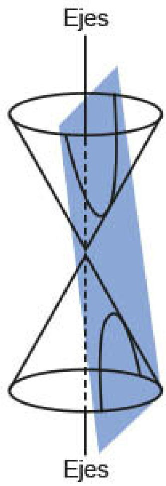
Si el plano que corta a uno de los mantos de la superficie cónica es de manera paralela a una generatriz, la sección que se forma es una parábola.



Si el plano que corta a la superficie cónica es de manera oblicua a una generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica, la sección que se forma es una elipse.



Si el plano que corta es a ambos mantos de la superficie cónica es de manera oblicua y paralelo a ambas generatrices, la sección que se forma es una hipérbola.

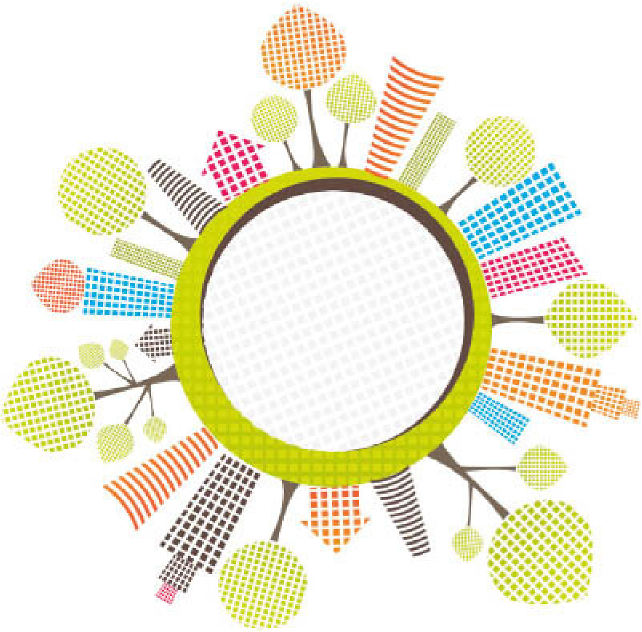


La circunferencia

En muchos aspectos de la vida se puede observar la presencia de la circunferencia, por ejemplo, en las ruedas de varios tipos de transporte como la bicicleta.

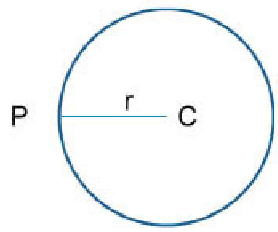
La bicicleta es un ejemplo claro de lo que estudiarás en este bloque. Está formada por unos tubos que sostienen sus dos ruedas, ahí se aplican varios conceptos de geometría. Cada rueda (arco) está perfectamente formada desde un centro del cual salen los rayos (radios de la circunferencia). Al medir exactamente lo mismo forman el aro de la circunferencia, que es el diámetro. Conoceremos ahora cada uno de estos elementos.

Conforme a la Real Academia de la Lengua Española, la circunferencia es: U*na curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, el centro, situado en el mismo plano.*

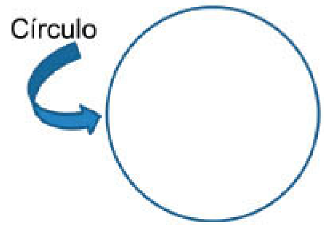


Elementos de la circunferencia

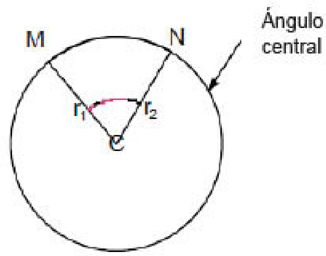
Se denomina *radio* a cualquier segmento que une el centro, con un punto P de la circunferencia; así en la siguiente figura se muestra una circunferencia de centro C y radio r = CP



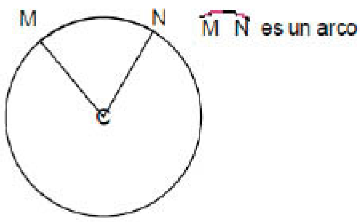
El *círculo* es la superficie limitada por la circunferencia:



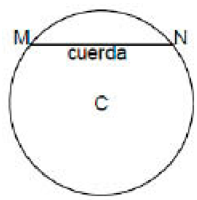
El *ángulo central* es el ángulo formado por dos radios.



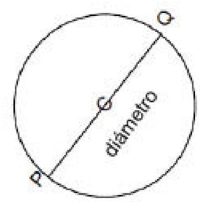
Un arco es una porción de circunferencia, cuya representación es con el símbolo ⌒



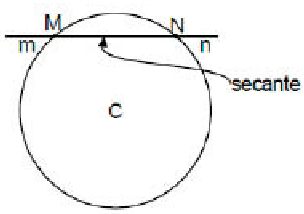
Una *cuerda* es el segmento que une a dos puntos de la circunferencia.



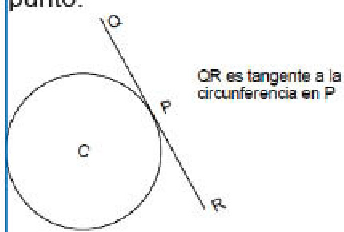
El diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, cuya longitud es el doble de la longitud del radio.



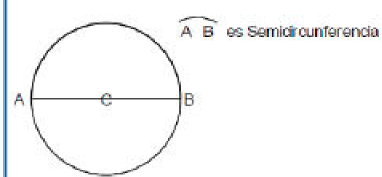
La *secante* de una circunferencia es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.



La *tangente* a una circunferencia es cualquier recta que toca la circunferencia en un solo punto.



La *semicircunferencia* es un arco igual a la mitad de la circunferencia.



Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

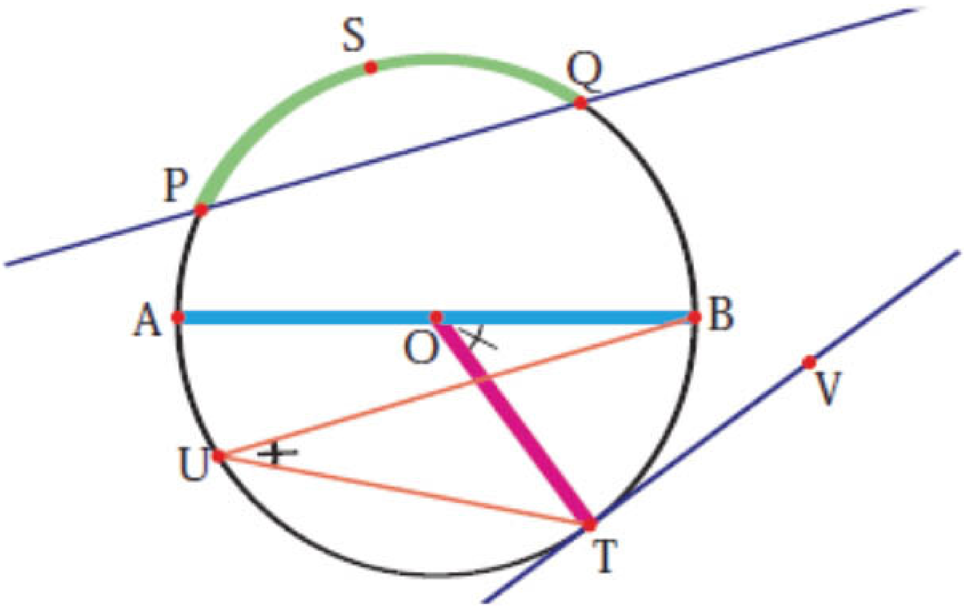
1. Describe brevemente el proceso de construcción de una cónica.

2. Elabora con algún material (cartón, plastilina, o cualquier otro que tengas a la mano) cada una de las cuatro cónicas y realiza los cortes que se necesita en cada cono. Explica qué descubres.

3. Menciona las condiciones que deben existir para que se formen las siguientes cónicas:

Circunferencia	Parábola	Hipérbola	Elipse

4. Identifica los elementos que componen la circunferencia, siempre haciendo referencia a las variables.



5. Relaciona ambas columnas con los conceptos acerca de los elementos de la circunferencia, escribiendo dentro del paréntesis la letra correspondiente.

a) Semicircunferencia	( ) Es cualquier segmento que une el centro con un punto P de la circunferencia.
b) Arco	( ) Es la superficie limitada por la circunferencia.
c) Diámetro	( ) El ángulo formado por dos radios.
d) Ángulo central	( ) Es una porción de circunferencia, cuya representación es con el símbolo $\frown$
e) Círculo	( ) Es el segmento que uno a dos puntos de la circunferencia.
f) Cuerda	( ) Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, cuya longitud es el doble de la longitud del radio.
g) Radio	( ) Es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
h) Secante	( ) Es cualquier recta que toca la circunferencia en un solo punto.
i) Tangente	( ) Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

6. Identifica una aplicación de la circunferencia en la vida diaria donde demuestres la mayor cantidad de sus elementos, tal como lo vimos con la bicicleta o el reloj.

Con la realización de estos ejercicios reflexiona si identificas lo que es una circunferencias y sus elementos. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Menciona dos aplicaciones de cada una de las cuatro cónicas en tu vida cotidiana o entorno inmediato.

Circunferencia	Parábola	Elipse	Hipérbola

Aprende más

Ecuación de la circunferencia en distintas formas: ordinaria, canónica, general, dados tres puntos

Forma ordinaria

Una circunferencia cuyo centro está en el punto $C(h,k)$ y cuyo radio es r, tiene la forma:

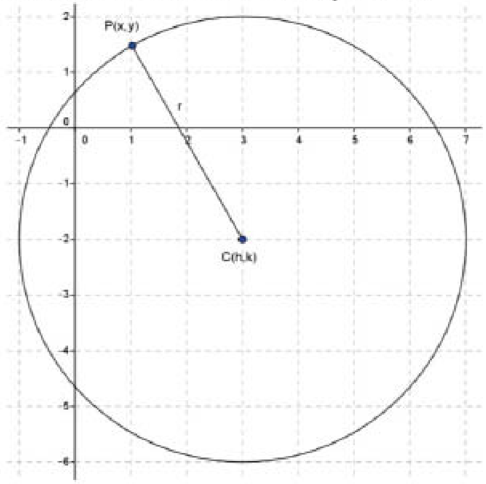
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta ecuación se llama forma *ordinaria* o estándar de la circunferencia.

Recuerda que en el bloque II, cuando estudiaste la distancia entre dos puntos, ésta se definía como:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Si observamos la siguiente figura:



$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

y reacomodando términos:

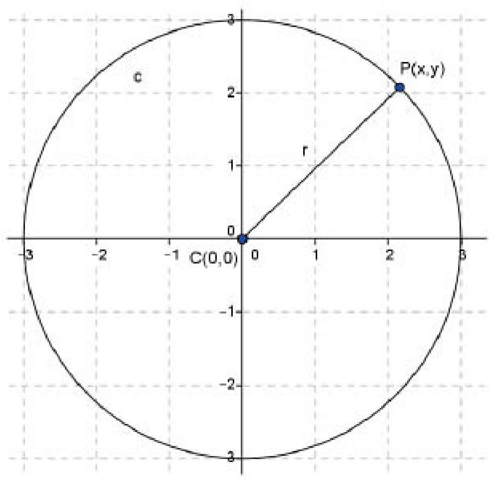
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Forma canónica.

Si el centro de la circunferencia se ubica en el origen:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Si observamos la siguiente figura:



$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$r^2 = (x)^2 + (y)^2$

y reacomodando términos:

$x^2 + y^2 = r^2$

Esta es la ecuación de la circunferencia en su *forma canónica*.

Como recordarás, la extensión de una ecuación a los intervalos de valores para los que las variables *x* y *y* son números reales.

Para la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

La extensión de la variable *x* está en el intervalo $-r \leq x \leq r$

La extensión de la variable y está en el intervalo $-r \leq x \leq r$

Por ejemplo, para la ecuación $x^2 + y^2 = 16$

$r^2 = 16$ $\qquad r = \pm\sqrt{16}$ $\qquad r = \pm 4$

La extensión de la variable *x* está en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$

La extensión de la variable y está en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$

Forma general

Si desarrollamos los binomios al cuadrado en la forma ordinaria de la circunferencia, tenemos:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$

y reduciendo términos semejantes, tomando los valores de *h* y *k* como números reales:

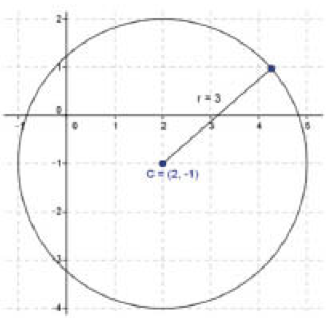
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Esta ecuación es la *forma general* de la circunferencia.

Como habrás notado, en las tres formas de la circunferencia, los coeficientes numéricos de x^2 y y^2 siempre son 1.

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la circunferencia de la siguiente figura:



Solución

Las coordenadas del centro indican que la circunferencia está fuera del origen, es decir, $C(h,k)$, por lo que está en la forma ordinaria $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Las condiciones que proporciona el problema son

$C(2,-1)$ y $r = 3$

Sustituimos los valores de $h = 2$, $k = -1$ y $r = 3$

$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = (3)^2$
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ *Forma ordinaria*

Se desarrollan los binomios y se simplifican términos semejantes:
$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$

Se pasa todo al lado izquierdo:
$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 + 1 - 9 = 0$
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ *Forma general*

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen y tiene un radio de 5.

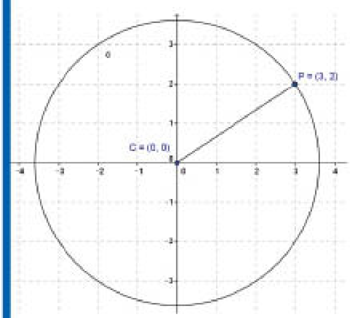
Solución

Las condiciones que proporciona el problema son $C(0,0)$ y r = 5
Sustituimos los valores de $h = 0$, $k = 0$ y $r = 5$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (5)^2$
$x^2 + y^2 = 25^2$ *Forma canónica*

Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la circunferencia que presenta las siguientes condiciones:



Solución

Las coordenadas del centro indican que la circunferencia está en el origen, por lo que está en la forma canónica
$x^2 + y^2 = r^2$

Se sustituyen los valores del punto $P(3,2)$ en esta ecuación para determinar el valor del radio:

$(3)^2 + (2)^2 = r^2$ $9 + 4 = r^2$ $r = \sqrt{13}$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación es:

$x^2 + y^2 = 13$ *Forma general*

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(-2,1)$ cuyo centro está en $C(-3,-2)$.

Solución

La circunferencia está fuera del origen, por lo que utilizaremos la forma ordinaria.
La longitud del radio es la distancia que existe entre el punto P y el centro.
Se sustituyen los valores del centro $C(-3,-2)$ y del punto $(-2,1)$ en esta ecuación para determinar el valor del radio:

$(x-(-3))^2+(y-(-2))^2=r^2$ $\quad (x+3)^2+(y+2)^2=r^2$ $\quad (-2+3)^2+(1+2)^2=r^2$

$(-1)^2+(3)^2=r^2$ $\quad 1+9=r^2$ $\quad 10=r^2$ $\quad r=\sqrt{10}$

Con el valor del radio $r=\sqrt{10}$ y las coordenadas del centro, se sustituyen en

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-(-3))^2+(y-(-2))^2=(\sqrt{10})^2$ $\quad (x+3)^2+(y+2)^2=10$ Forma ordinaria

Se desarrollan los binomios y se simplifican términos semejantes

$x^2+6x+9+y^2+4y+4=10$

Se pasa todo al lado izquierdo:

$x^2+y^2+6x+4y+9+4-10=0$

$x^2+y^2+6x+2y+13=0$ *Forma general*

Ejemplo 5

Encuentra la ecuación de la circunferencia, si los extremos de uno de sus diámetros son los puntos $A(-1,-3)$ cuyo centro está en $B(5,-1)$.

Solución

Tenemos que encontrar las coordenadas del centro y la longitud de su radio para encontrar la ecuación de la circunferencia. Las coordenadas del centro *C(h,k)* corresponden al punto medio del diámetro, entonces la longitud del radio es la mitad del diámetro.

$h=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}$ $\quad h=2$ $\qquad k=\frac{-3+(-1)}{2}=\frac{-4}{2}$ $\quad k=-2$

Las coordenadas del centro son $C(2,-2)$

El radio es igual a $r = \frac{d}{2}$, donde d es el diámetro, cuya longitud se calcula con la distancia entre los puntos A y B:

$d = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + (5+1)^2} =$

$\sqrt{(2)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$

$r = \frac{\sqrt{40}}{2}$

Teniendo las coordenadas del centro $C(2,-2)$ y el radio $r = \frac{\sqrt{40}}{2}$

Se sustituyen en la forma ordinaria $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-2)^2 + (y-(-2))^2 = \left(\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2$

Se desarrollan los binomios y se simplifican términos semejantes

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = \frac{40}{4}$ $\quad x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 + 4 - 10 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ *Forma general*

Ejemplo 6

Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(-2,3)$ y es tangente a la recta $20x - 21y - 42 = 0$

Solución

Una recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio, cuyos extremos son el punto de tangencia y el centro de dicha circunferencia. Se calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta con la fórmula:

$d = \left|\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$, tomando los valores del centro $C(x,y)$ para sustituirlos en dicha fórmula, y el resultado será el radio.

$d = \left|\frac{20(-2)-21(3)-42}{\pm\sqrt{(20)^2+(-21)^2}}\right| = \left|\frac{-40-63-42}{\pm\sqrt{400+441}}\right| = \left|\frac{-145}{\pm\sqrt{881}}\right| = \left|\frac{-145}{29}\right| = |-5| = 5$ $\quad r = 5$

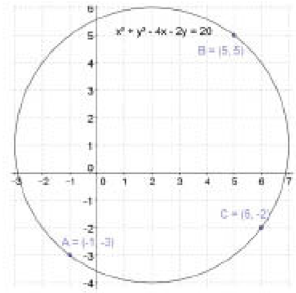
Se sustituyen los valores del centro $C(-2,3)$ y el radio $r = 5$ en la forma ordinaria

$(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = (5)^2$ $\quad x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ *Forma general*

Dados 3 puntos

Ejemplo 7



Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,-3)$, $B(5,5)$ y $C(6,-2)$

Solución

Se sustituyen los valores de cada punto en la ecuación general de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Punto $A(-1,-3)$

$(-1)^2 + (-3)^2 + D(-1) + E(-3) + F = 0$

$1 + 9 - D - 3E + F = 0$

$-D - 3E + F = -10$ (ec. 1)

Punto $B(5,5)$

$(5)^2 + (5)^2 + D(5) + E(5) + F = 0$

$25 + 25 + 5D + 5E + F = 0$

$5D + 5E + F = -50$ (ec. 2)

Punto $C(6,-2)$

$(6)^2 + (-2)^2 + D(6) + E(-2) + F = 0$

$36 + 4 + 6D - 2E + F = 0$

$6D - 2E + F = -40$ (ec. 3)

Se forma un sistema de tres ecuaciones con tres variables

(1) $-D - 3E + F = -10$

(2) $5D + 5E + F = -50$

(3) $6D - 2E + F = -40$

Resolviendo por el método de suma y resta

Tomar las ecuaciones (1) y (2) y eliminar F

$-D - 3E + F = -10$ (1)

$5D + 5E + F = -50$ (-1)

$-D - 3E + F = -10$

$-5D - 5E - F = 50$

$-6D - 8E = 40$ (ec. 4)

Tomar las ecuaciones (1) y (3) y eliminar F

$-D - 3E + F = -10$ (1)

$6D - 2E + F = -40$ (-1)

$-D - 3E + F = -10$

$-6D + 2E - F = 40$

$-7D - E = 30$ (ec. 5)

Se toman las ecuaciones (4) y (5) y eliminar E o 5

$-6D - 8E = 40$ (1)

$-7D - E = 30$ (-8)

$-6D - 8E = 40$

$56D + 8E = -240$

$50D = -200$

$D = \frac{-200}{50}$ $D = -4$

Se sustituye el valor de D en la ec. 4

$-6(-4) - 8E = 40$

$24 - 8E = 40$

$-8E = 40 - 24$

$E = \frac{16}{-8}$ $E = -2$

$-7(-4) - E = 30$

$28 - E = 30$

$E = 30 - 28$

$E = -2$

Se sustituyen los valores de D y E en la ecuación 1, 2 o 3, en cualquiera de las 3

Sustituyendo en la ec. 1

$-(-4) - 3(-2) + F = -10$

$4 + 6 + F = -10$

$F = -10 - 4 - 6$

$F = -20$

Sustituyendo en la ec. 2

$5(-4) + 5(-2) + F = -50$

$-20 - 10 + F = -50$

$F = -50 + 20 + 10$

$F = -20$

Sustituyendo en la ec. 3

$6(-4) - 2(-2) + F = -40$

$-24 + 4 + F = -40$

$F = -40 + 24 - 4$

$F = -20$

Se sustituyen los valores de D, E y F en la forma general

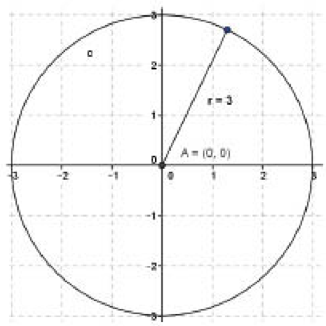
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ Forma general

Aplica lo aprendido

Actividad 2

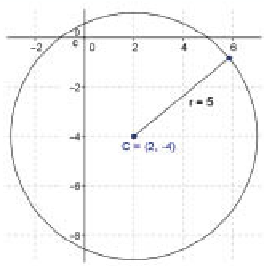
1. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio = 3

2. Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia:



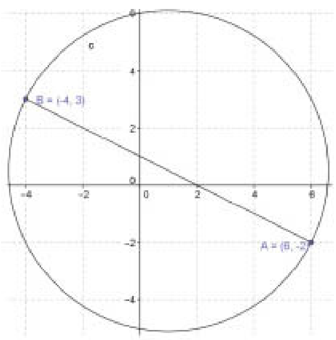
3. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en $C(2,5)$ y radio = 6

4. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en $C(2,-4)$ y radio = 5



5. Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de los diámetros son $A(-4,7)$ y $B(10,-3)$

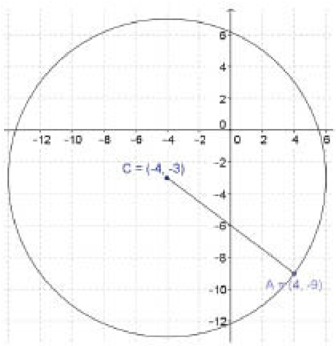
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia que presenta las siguientes condiciones:



7. Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de los diámetros son $A(-1,5)$ y $B(-5,-1)$

8. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,3)$ y $B(4,-1)$

9. Encuentra la ecuación de la circunferencia que presenta las siguientes condiciones:

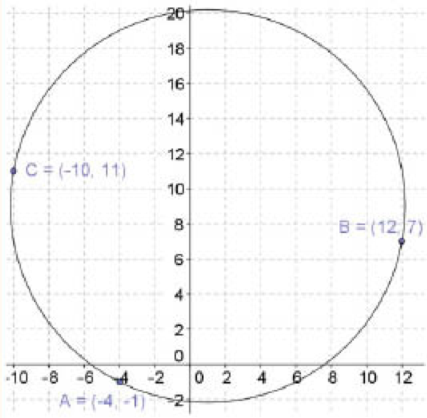


10. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en $C(13,-6)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$

11. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en $C(10,-5)$ y es tangente a la recta $4x + 3y - 50 = 0$

12. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5,10)$, $B(7,4)$ y $C(-9,-4)$

13. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los siguientes puntos:



Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si eres capaz de obtener las diferentes formas de la ecuación de la circunferencia.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero lo siguiente, justificando tu respuesta: ¿Cómo se determina la forma general de la ecuación de la circunferencia que pasa un punto y el centro?

____

____

____

____

Cierre de bloque V

Reflexiona sobre lo aprendido

En este bloque has ubicado a la circunferencia como un lugar geométrico, además identificaste sus elementos y aplicaste sus ecuaciones.

Secciones cónicas

- Circunferencia
- Parábola
- Hipérbola
- Elipse

Elementos de la circunferencia

- Radio
- Círculo
- Ángulo central
- Arco
- Cuerda
- Diámetro
- Secante
- Tangente
- Semicircunferencia

Ecuaciones de la circunferencia

- Ordinaria
- Canónica
- General
- Dados tres puntos

Evaluación del bloque V

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque V.

Interpretación del nivel de avance:
100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Defines la circunferencia a partir de los elementos que la componen.				
	Identificas las secciones cónicas.				
	Identificas la forma cónica de la ecuación de una circunferencia				
	Identificas la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia				
	Identificas la forma de la ecuación de una circunferencia conocidos tres puntos				
	Identificas la forma general de la ecuación de una circunferencia				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Elaboras cada una de las cuatro cónicas.				
	Obtienes la ecuación de una circunferencia con centro fuera del origen y el radio (forma ordinaria).				
	Obtienes la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y el radio (forma canónica).				
	Obtienes la ecuación de una circunferencia en su forma general, a partir de la transformación de la forma ordinaria.				
	Obtienes la ecuación de una circunferencia en su forma general y ordinaria a partir de varios de sus elementos (dos puntos, un punto y el radio, el diámetro).				
	Obtienes la ecuación de la circunferencia dada una recta tangente a la misma.				
	Obtienes la ecuación de la circunferencia dados tres de sus puntos.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

____
____
____
____
____

2. ¿Cómo puedes utilizar lo aprendido en el presente y futuro?

____
____
____

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

____
____
____

Recuerda que deberás integrar las respuestas a tu cuaderno y anotar número del bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque V

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollado)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	
	• Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	
	• Asume una actitud constructivista congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

BLOQUE VI

Aplicas los elementos y las ecuaciones de una parábola

Bloque VI

12 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. La parábola y sus elementos.
2. Ecuación de una parábola con vértice en el origen.
3. Ecuación de una parábola con vértice fuera del origen.
4. Transformar la ecuación de la parábola en su forma ordinaria a partir de la forma general.
5. Aplicación de los elementos y ecuaciones de la parábola en situaciones de la vida cotidiana.

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: identificar los elementos asociados a la parábola.
- Actividad 2 : reconocer la ecuación general y ordinaria de la parábola.
- Actividad 3: Aplicar los elementos y ecuaciones de la parábola en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

Estos productos se considerarán para la integración de tu portafolio de evidencias.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás tres productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.
- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje.

Introducción

En el bloque anterior estudiamos las distintas formas de expresar la ecuación de una circunferencia; además, conocimos las secciones cónicas, que son curvas que se obtienen de la intersección de un cono circular recto con un plano.

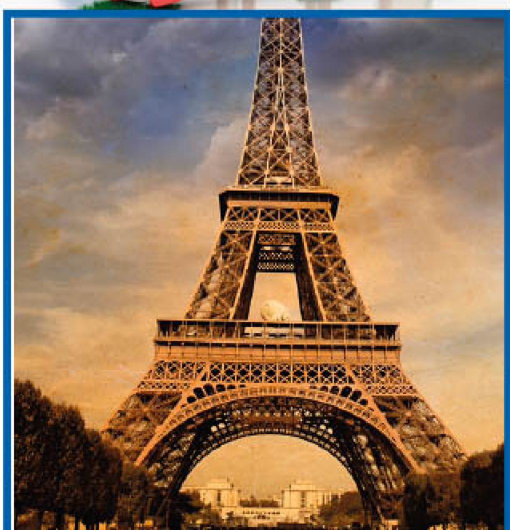
Ahora, en este bloque aprenderás a:

- Identificar los elementos asociados con la parábola.
- Reconocer la ecuación general y ordinaria de la parábola.
- Aplicar los elementos y ecuaciones de la parábola en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

La parábola es un elemento geométrico de mucha importancia. Aparece en diversas ramas de las ciencias aplicadas debido a que su forma corresponde con las gráficas de las ecuaciones cuadráticas. Esto ayuda a realizar los cálculos necesarios para diversas aplicaciones, como por ejemplo: en antenas de radar, pues la parábola permite concentrar los haces de señales en un receptor situado en el foco.

¿Con qué propósito?

Reconoces las formas general y ordinaria de las ecuaciones de la parábola, identificando los elementos asociados con ella, para aplicar lo aprendido en la solución de problemas y en situaciones de la vida cotidiana.



Y en arquitectura:

Para iniciar, reflexiona

Explica dos ejemplos donde demuestres la importancia del uso de la parábola.

¿Con qué conocimientos cuento?

Has llegado al bloque VI de Matemáticas III, y para comprenderlo es conveniente recordar los siguientes temas.

Evaluación diagnóstica

Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones que se muestran enseguida y elabora en tu libro, libreta o cuaderno lo que se te pide.

1. ¿Qué diferencias encuentras entre una parábola y una circunferencia?

____

____

____

2. Explica brevemente cómo se obtiene una parábola al cortar un cono circular recto con un plano.

____

____

____

3. Realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios

Dada la ecuación $y^2 = 5x$ determina:

a) La extensión de la variable x

b) La extensión de la variable y

4. Dada la ecuación $y^2 = -5x$ determina:

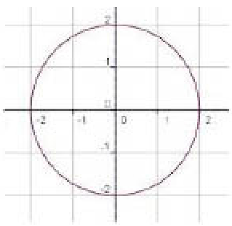
a) La extensión de la variable x

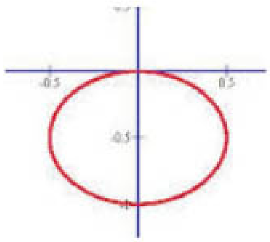
b) La extensión de la variable y

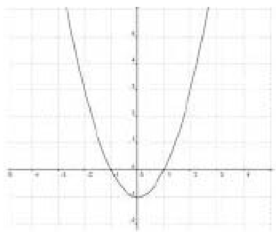
5. Dada la ecuación $x^2 = -5y$ determina la extensión de la variable y

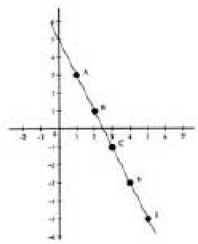
6. Dada la ecuación $x^2 = -5y$ determina la extensión de la variable x

7. Indica qué tipo de función representa cada una de las siguientes gráficas:









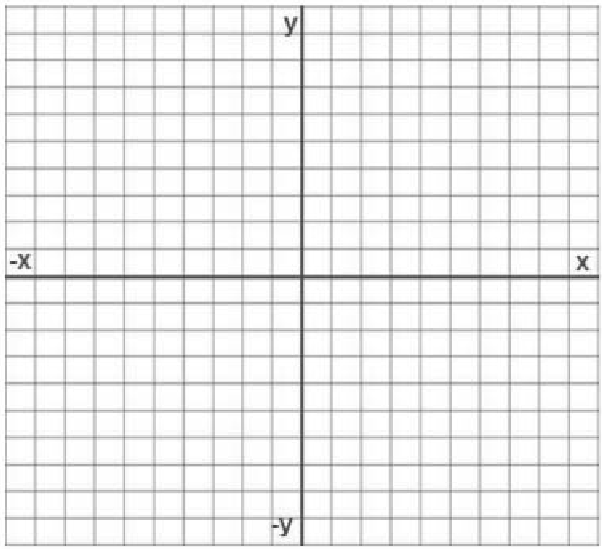
8. Completa la siguiente tabla dada la ecuación $y^2 = 3x$ ($y = \pm\sqrt{3x}$)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	±	±	±	±	±	±	±	±	±

9. Completa el siguiente trinomio cuadrado para que sea perfecto.

$x^2 + 12x - 3 =$

10. Grafica la ecuación del ejercicio anterior con los resultados obtenidos en la tabla.



Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 preguntas considera tu resultado como Bueno, de 6 a 7 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como No suficiente, lo cual exige que refuerces tus conocimientos previos, repasando tus apuntes de Matemáticas I y II.

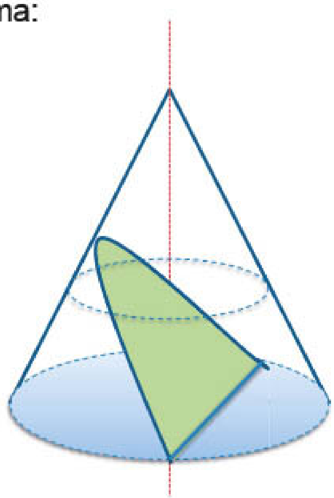
¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Aprende más

La parábola y sus elementos

En el bloque anterior analizamos las secciones cónicas, que son curvas que se forman cuando un cono circular recto se intersecta con un plano, obteniendo con ello tres curvas, además de la circunferencia. Una de estas curvas es la parábola.

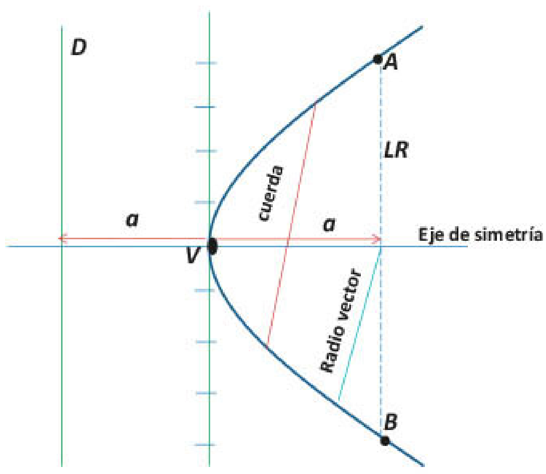
El corte es de la siguiente forma:



Parábola: es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, cuya distancia de un punto fijo llamado *foco* es igual a la distancia a una recta fija, llamada *directriz*.

Elementos de la parábola:

- V = vértice, punto de intersección entre la parábola y el eje principal.
- F = foco, un punto fijo.
- D = directriz.
- a = parámetro, distancia entre el vértice y el foco o del vértice a la directriz.
- $AB = LR$ = lado recto = $|4a|$, la distancia que existe entre dos puntos simétricos de la parábola.
- Eje de la parábola o de simetría, recta que pasa por el vértice y el foco.
- Radio vector, recta del eje de la parábola a uno de sus puntos
- Cuerda, segmento de recta que une dos puntos de la de la parábola



Hay dos características importantes de la parábola:

- La posición del eje determina la posición de la parábola; entonces, se generan parábolas horizontales, verticales o inclinadas.
- La parábola siempre es simétrica con respecto a su propio eje.

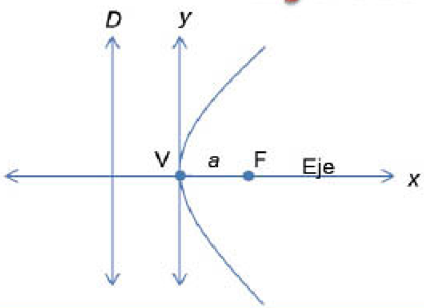
En la figura anterior, podemos describir la parábola como sigue:

- Pasa por el vértice y abre hacia el foco.
- Tiene la misma distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz, es decir, el mismo parámetro (*a*).
- El ancho focal o lado recto a la cuerda que pasa exactamente en el foco, que es perpendicular al eje de simetría y paralela a la directriz.
- Las coordenadas del vértice son V(0,0)

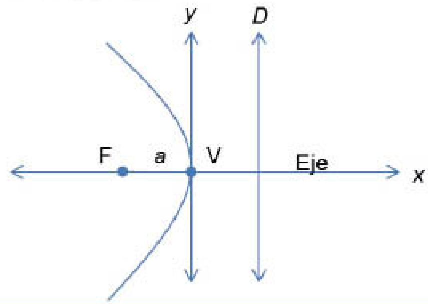
Aprende más

Ecuación de una parábola con vértice en el origen

Eje horizontal

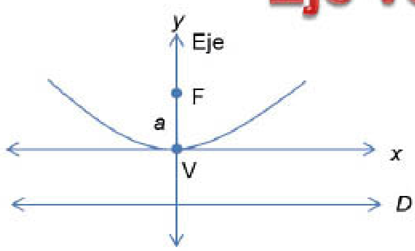


Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$y^2 = 4ax$	(a,0)	$x = -a$	LR = $\|4a\|$

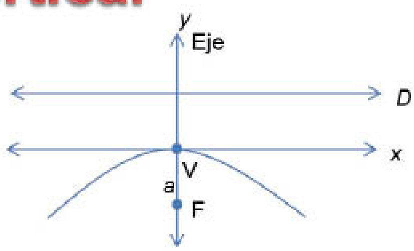


Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$y^2 = -4ax$	(-a,0)	$x = a$	LR = $\|4a\|$

Eje vertical



Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$x^2 = 4ay$	(0,a)	$y = -a$	LR = $\|4a\|$



Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$x^2 = -4ay$	(0,-a)	$y = a$	LR = $\|4a\|$

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(3,0)$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la derecha con foco $F(a,0)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = 4ax$	$(a,0)$	$x = -a$

a) El parámetro $a = 3$

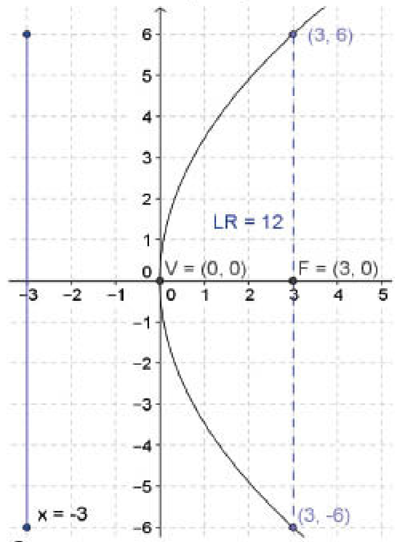
b) Su ecuación $y^2 = 4(3)x$ $\quad y^2 = 12x$

c) Su directriz está en $x = -(3)$ $\quad x = -3$

d) La longitud del lado recto LR $\quad LR = |4(3)|$ $\quad LR = 12$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = 3$
$y^2 = 4ax$ $\quad y^2 = 4(3)(3)$ $\quad y^2 = 36$ $\quad y = \pm\sqrt{36}$ $\quad y = \pm 6$
Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (3,6) y (3,-6)

f) Su gráfica



Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(0,-6)$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la abajo con foco $F(0,-a)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = -4ay$	$(0,-a)$	$y = a$

a) El parámetro $a = 6$

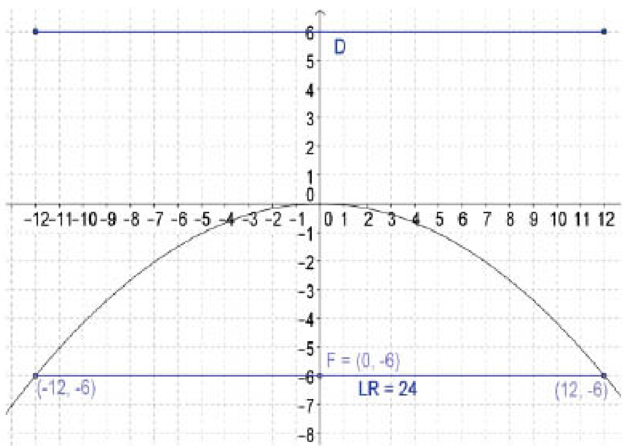
b) Su ecuación $x^2 = -4(6)y$ $\quad x^2 = -24y$

c) Su directriz está en $y = 6$ $\quad y = 6$

d) La longitud del lado recto LR
$LR = |4(-6)|$ $\quad LR = |-24|$ $\quad LR = 24$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:
Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = 6$
$x^2 = -4ay$ $\quad x^2 = -4(-6)(6)$
$x^2 = 144$ $\quad x = \pm\sqrt{144}$ $\quad x = \pm 12$
Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son:
(12,-6) y (-12,-6)

f) Su gráfica



Ejemplo 3

Encuentra la ecuación de la parábola y los elementos que se te solicitan, cuya longitud del lado recto es 8 y su gráfica abre hacia la izquierda.

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la izquierda:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = -4ax$	$(-a,0)$	$x = a$

Como la longitud del lado recto $LR = |4a| = 8$

despejamos a $\quad 8 = |4a| \quad a = \frac{8}{4} \quad a = 2$

a) El parámetro $a = 2$

b) Su ecuación $y^2 = -4(2)x \qquad y^2 = -8x$

c) Las coordenadas del foco son $F(-2,0)$

d) Su directriz está en $x = a \qquad x = 2$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

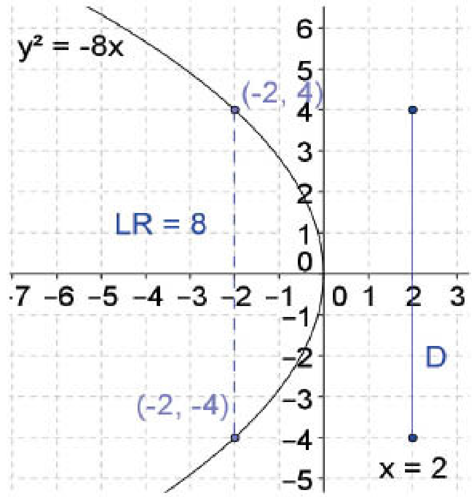
Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = -2$

$y^2 = -4ax \quad y^2 = -4(2)(-2)$

$y^2 = 16 \quad y = \pm\sqrt{16} \quad y = \pm 4$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (-2,4) y (-2,-4)

f) Su gráfica



Ejemplo 4

Dada la ecuación de la parábola $x^2 = 20y$, calcula sus elementos.

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia arriba y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = 4ay$	$(0,a)$	$y = -a$

a) Su parámetro. Como la ecuación tiene la forma $x^2 = 4ay$, $4a = 20$.

Despejamos a: $a = \frac{20}{4} = 5$

El parámetro $a = 5$

b) Su foco está en $F(0,a)$ por lo que $F(0,5)$

c) Su directriz está en $y = -a \quad y = -5$

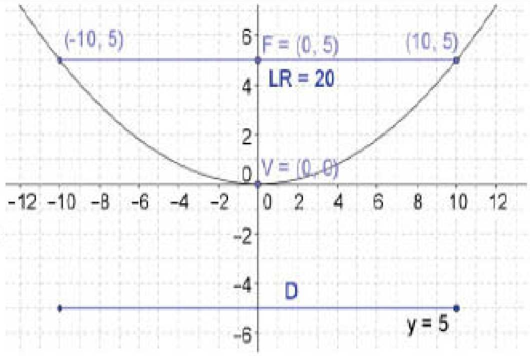
d) La longitud del lado recto

$LR = |4a| \quad LR = |4(5)| \quad LR = |20| \quad LR = 20$

Ejemplo 4

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = 5$
$x^2 = 4ay$ $\quad x^2 = 4(5)(5)$ $\quad x^2 = 100$
$x = \pm\sqrt{100}$ $\quad x = \pm 10$
Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (10,5) y (-10,5)

f) Su gráfica



Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

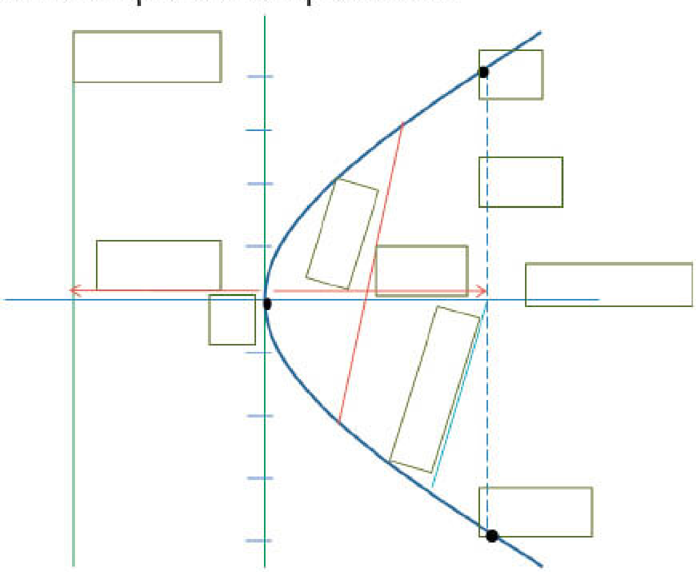
1. ¿Hacia dónde abre la parábola cuando está sobre el eje horizontal x?

____

2. ¿Hacia dónde abre la parábola cuando está sobre el eje vertical y?

____

3. Identifica los elementos que componen la parábola, escribiendo dentro del recuadro la variable o descripción correspondiente.



Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno y grafica.

4. Dada una parábola cuyo vértice está en el origen y su foco en $F(-3,0)$ encuentra: el parámetro, su ecuación, la directriz, la longitud del lado recto, las coordenadas de los puntos extremos y la gráfica.

5. Dada una parábola que abre hacia arriba, cuya directriz es $y = -2$, encuentra: el parámetro, su ecuación, las coordenadas del foco, la longitud del lado recto, las coordenadas de los puntos extremos y la gráfica.

6. Dada una parábola cuyo foco está en $F(0,-5)$, encuentra: el parámetro, su ecuación, la directriz, la longitud del lado recto, las coordenadas de los puntos extremos y la gráfica.

7. Dada una parábola que abre hacia la derecha, cuya lado recto es $LR = 8$, encuentra: el parámetro, su ecuación, las coordenadas del foco, la directriz, las coordenadas de los puntos extremos y la gráfica.

8. Dada la ecuación de la parábola $x^2 = -16y$, encuentra: el parámetro, las coordenadas del foco, la directriz, la longitud del lado recto, las coordenadas de los puntos extremos y la gráfica.

9. Dadas las coordenadas del lado recto de una parábola $M(3,6)$ y $N(3,-6)$, encuentra: el parámetro, su ecuación, la directriz, la longitud del lado recto y la gráfica.

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si identificaste el concepto de parábola, sus elementos y si fuiste capaz de obtener su ecuación*. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Explica brevemente los elementos indispensables asociados con una parábola:

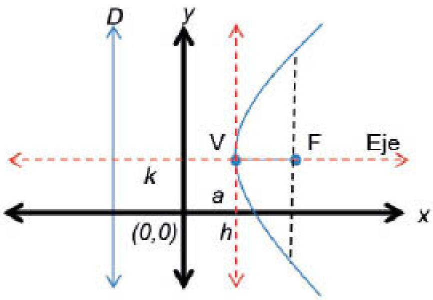
Parámetro	
Directriz	
Foco	
Eje	
Lado recto	

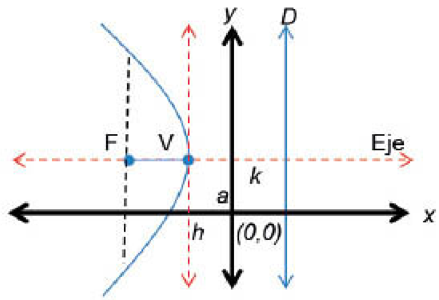
Aprende más

Ecuación de una parábola con vértice fuera del origen

La ecuación de una parábola, ya sea horizontal o vertical, cuyo vértice está fuera del origen y que se encuentra en el punto $v(h,k)$, se obtiene reemplazando x por $(x-h)$ y y por $(y-k)$ en la ecuación básica de la parábola con vértice fuera del origen, al igual que se hizo con la circunferencia.

Eje horizontal

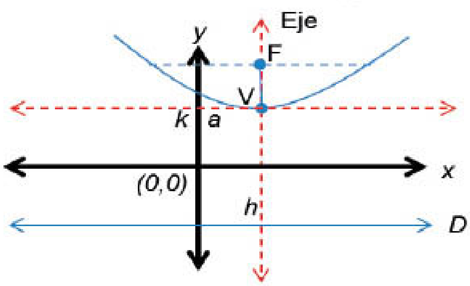


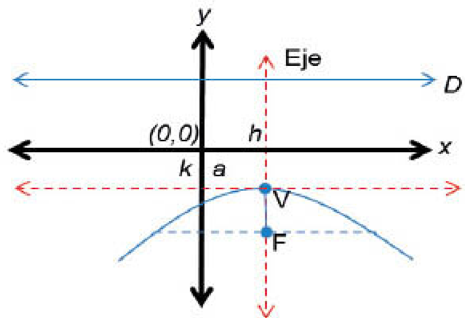


Ecuación	Foco
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(h+a,\ k)$
Directriz	Lado recto
$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

Ecuación	Foco
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(h+a,\ k)$
Si a es negativa	
Directriz	Lado recto
$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

Eje vertical





Ecuación	Foco
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h,\ k+a)$
Directriz	Lado recto
$y = k - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

Ecuación	Foco
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h,\ k+a)$
Directriz	Lado recto
$y = k - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

Por lo tanto, las ecuaciones de la parábola en su forma ordinaria con vértice fuera del origen son:

- $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ Si abre hacia la derecha o izquierda
- $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ Si abre hacia arriba o hacia abajo

Si desarrollamos, las ecuaciones de la parábola en su forma general con vértice fuera del origen son:

- $y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$ Si abre hacia la derecha o izquierda
- $x^2 \pm bx \pm cy \pm d = 0$ Si abre hacia arriba o abajo

Donde *b*, *c* y *d* son números reales.

Ejemplo 5

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3, 2) y su foco en $F(5, 2)$

Solución

Como el foco está después del vértice, la parábola abre hacia la derecha, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(h+a, k)$	$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 5 - 3$ $\quad a = 2$

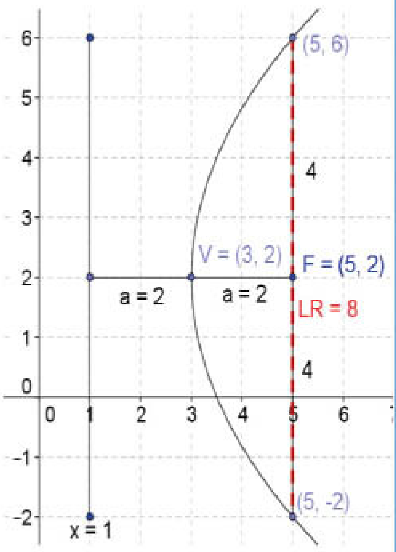
b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-2)^2 = 4(2)(x-3)$ $\quad (y-2)^2 = 8(x-3)$

c) Desarrollamos para la ecuación en forma general:
$y^2 - 4y + 4 = 8x - 24$ $\quad y^2 - 4y + 4 - 8x + 24 = 0$
Reduciendo términos: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a$ $\quad x = 3 - 2$ $\quad x = 1$

e) La longitud del lado recto LR $\quad LR = \lvert 4(2) \rvert$ $\quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos arriba de él y 4 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 4 a la ordenada del foco k, obteniendo $k + 4 = 2 + 4 = 6$ $k - 4 = 2 - 4 = -2$, por lo que las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (5,6) y (5,-2)



g) Su gráfica

Ejemplo 6

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (-2, -4) y su foco en $F(-5, -4)$

Solución

Como el foco está antes del vértice, la parábola abre hacia la izquierda, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(h-a, k)$	$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = -5 - (-2)$ $a = -5 + 2$ $a = -3$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-(-4))^2 = 4(-3)(x-(-2))$ $(y+4)^2 = -12(x+2)$

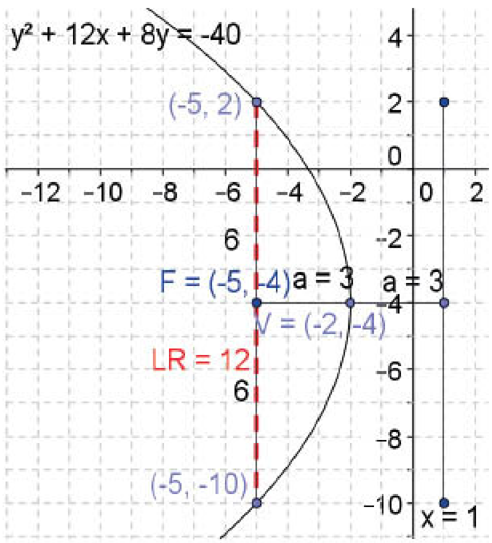
c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$y^2 + 8y + 16 = -12x - 24$ $y^2 + 8y + 16 + 12x + 24 = 0$
Reduciendo términos $y^2 + 8y + 12x + 40 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a$ $x = -2 - (-3)$ $x = 1$

e) La longitud del lado recto LR $LR = \lvert 4(-3) \rvert$ $LR = 12$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 12, existen 6 puntos arriba de él y 6 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 6 a la ordenada del foco k,
obteniendo: $k + 6 = -4 + 6 = 2$
$k - 6 = -4 - 6 = -10$, por lo que las coordenadas son (-5, 2) y (-5, -10)

g) Su gráfica



Ejemplo 7

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (5, 2) y su foco en F(5, 4)

Solución

Como el foco está arriba del vértice, la parábola abre hacia arriba, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, k+a)$	$y = k - a$	$LR = \|4a\|$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 4 - 2 \quad a = 2$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(x-5)^2 = 4(2)(y-2) \qquad (x-5)^2 = 8(y-2)$

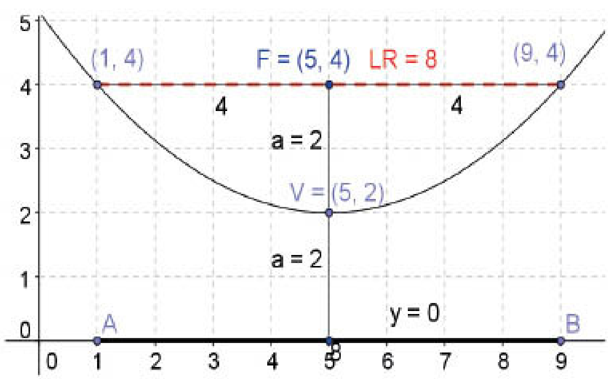
c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$x^2 - 10x + 25 = 8y - 16 \qquad x^2 - 10x + 25 - 8y + 16 = 0$
Reduciendo términos : $\quad x^2 - 10x - 8y + 41 = 0$

d) Su directriz está en $y = k - a \quad y = 2 - 2 \qquad y = 0$

e) La longitud del lado recto $LR \quad LR = |4(2)| \quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos a la Izquierda y
4 puntos a la derecha de él,
por lo que se suma y se resta 4 a la abscisa del foco h, obteniendo:
$h + 4 = 5 + 4 = 9$ y $h - 4 = 5 - 4 = 1$, las coordenadas son (1, 4) y (9, 4)

g) Su gráfica



Ejemplo 8

Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (4, 6) y su foco en $F(4, 1)$

Solución

Como el foco está abajo del vértice, la parábola abre hacia abajo, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, k+a)$	$y = k - a$	$LR = \|4a\|$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 1 - 6 \quad a = -5$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(x-4)^2 = 4(-5)(y-6) \quad (x-4)^2 = -20(y-6)$

c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$x^2 - 8x + 16 = -20y + 120 \quad x^2 - 8x + 16 + 20y - 120 = 0$

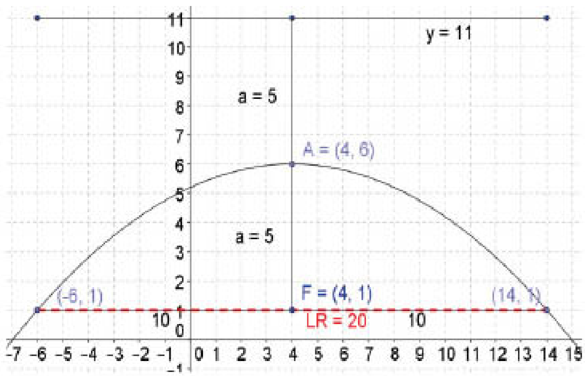
Reduciendo términos: $x^2 - 8x + 20y - 104 = 0$

Su directriz está en $y = k - a \quad y = 6 - (-5) \quad y = 11$

e) La longitud del lado recto $LR = |4(-5)| \quad LR = 20$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 20, existen 10 puntos a la Izquierda y 10 puntos a la derecha de él, por lo que se suma y se resta 10 a la abscisa del foco h, obteniendo: $h + 10 = 4 + 10 = 14$ y $h - 4 = 4 - 10 = -6$,
y las coordenadas son (-6, 1) y (14, 1)

g) Su gráfica

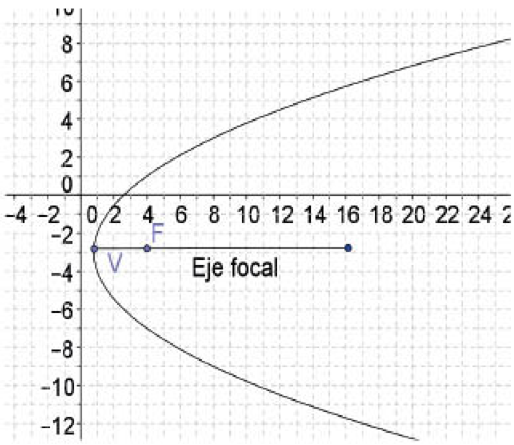


Aprende más

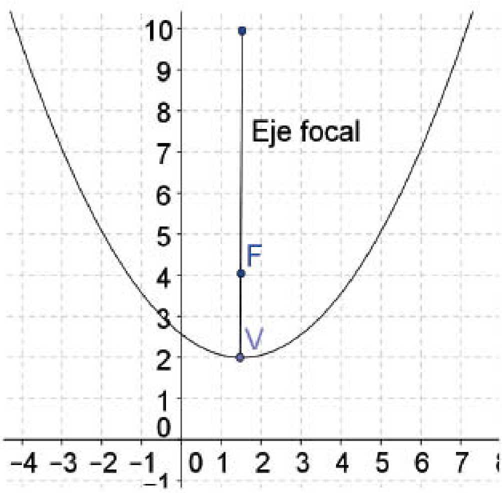
Transformar la ecuación de la parábola en su forma ordinaria a partir de la forma general

Revisemos las dos ecuaciones en su forma general considerando los ejes:

La ecuación general de la parábola se escribe de la forma $y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$ si su eje focal es paralelo al eje x, como se observa en la siguiente figura:



La ecuación general de la parábola se escribe de la forma $x^2 \pm bx \pm cy \pm d = 0$ si su eje focal es paralelo al eje y, como se observa en la siguiente figura:



Para transformar la ecuación de la parábola de su forma general a la forma ordinaria, hay que seguir el algoritmo:

1. Se separan los términos de *y* a la izquierda y los términos de *x* a la derecha.
2. Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en *y* entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando este término en ambos lados de la ecuación.
3. Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, con lo cual queda una ecuación de la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$

Los elementos de la parábola se obtienen como sigue:

- Las coordenadas del vértice.
  Se pueden obtener fácilmente, ya que al quedar la ecuación en la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ se extraen de aquí los valores de h y k.
- El parámetro a
  Se obtiene de dividir entre 4 el máximo común divisor que resultó del lado derecho de la factorización $4a(x-h)$, ya que el máximo común divisor es igual a $4a$.
- Las coordenadas del foco
  Están determinadas por la relación $(h + \mathrm{a}, \mathrm{k})$
- El lado recto
  Están determinado por la relación $LR = |4a|$
- La directriz
  Se obtiene por la relación $x = h - a$
- Las coordenadas de los extremos del lado recto
  Se divide el lado recto entre 2, y se suma *y* resta el resultado a la ordenada del foco.

Con los elementos anteriores, se realiza un esbozo de la gráfica correspondiente.

De la misma manera se puede realizar todo este procedimiento cuando la variable que está elevada al cuadrado sea la *x*, intercambiando en el algoritmo las *x* por *y* y las *h* por *k*.

Ejemplo 9

Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada la ecuación $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$, además de todos sus elementos.

Solución

a) Se separan los términos de y a la izquierda y los términos de x a la derecha.

$y^2 - 10y = 12x - 37$

b) Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en y entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando este término en ambos lados de la ecuación.

$y^2 - 10y + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12x - 37 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$ $\qquad$ $y^2 - 10y + (5)^2 = 12x - 37 + (5)^2$

$y^2 - 10y + 25 = 12x - 37 + 25$ $\qquad$ $y^2 - 10y + 25 = 12x - 12$

c) Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, quedando la ecuación de la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$

$(y - 5)^2 = 12(x - 1)$ Ésta es la ecuación en su forma ordinaria.

- Las coordenadas del vértice. Como la ecuación está en la forma $(y - k)^2 = 4a(x - h)$
  $k = 5$, $h = 1$. Por lo tanto, las coordenadas del vértice son (h, k) $(1, 5)$

- El parámetro a.
  Extraemos el factor común de la parte derecha, que es 12 y se iguala con $4a$
  $4a = 12 \qquad a = \frac{12}{4} \qquad a = 3$

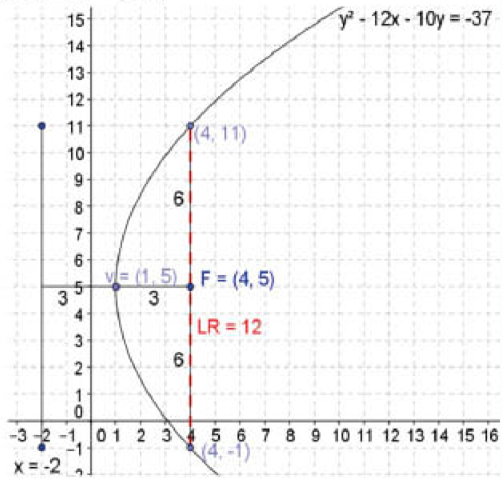
- Las coordenadas del foco. Están determinadas por la relación $(h + a, k)$
  $(1 + 3, 5) = (4, 5)$

- El lado recto. Están determinadas por la relación $LR = |4a|$
  $LR = |4(3)| \qquad LR = 12$

- La directriz.
  Están determinadas por la relación $x = h - a$
  $x = 1 - 3 \qquad x = -2$

- Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto
  $$\frac{LR}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
  $5 + 6 = 11 \qquad 5 - 6 = -1 \quad (4, 11)$ y $(4, -1)$

- La gráfica.



Ejemplo 10

Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada la ecuación $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$, además de todos sus elementos.

Solución

a) Se separan los términos de x a la izquierda y los términos de y a la derecha.
$x^2 + 2x = -4y + 19$

b) Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en x entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando éste término en ambos lados de la ecuación.
$x^2 + 2x + (\frac{2}{2})^2 = -4y + 19 + (\frac{2}{2})^2$ $\qquad$ $x^2 + 2x + (1)^2 = -4y + 19 + (1)^2$
$x^2 + 2x + 1 = -4y + 19 + 1$ $\qquad$ $x^2 + 2x + 1 = -4y + 20$

c) Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, quedando la ecuación de la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$
$(x + 1)^2 = -4(y - 5)$ Ésta es la ecuación en su forma ordinaria.

- Las coordenadas del vértice. Como la ecuación está en la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$
  $h = -1$, $y = 5$. Por lo tanto, las coordenadas del vértice son (h, k) $(-1, 5)$

- El parámetro a.
  Extraemos el factor común de la parte derecha, que es -4 y se iguala con $4a$
  $4a = -4$ $\qquad a = \frac{-4}{4}$ $\qquad a = -1$

- Las coordenadas del foco. Están determinadas por la relación $(h, k + a)$
  $(-1, 5 + (-1)) = (-1, 5 - 1)$ $\quad (-1, 4)$

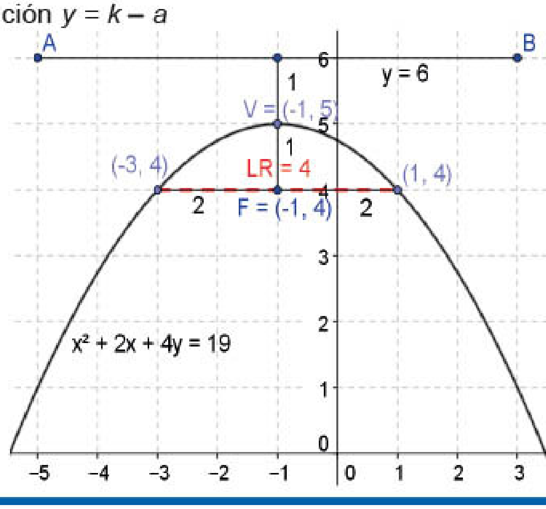
- El lado recto. Están determinadas por la relación $LR = |4a|$
  $LR = |4(-1)| = |-4|$ $\qquad LR = 4$

- La directriz. Están determinadas por la relación $y = k - a$
  $y = 5 - (-1)$ $\qquad y = 6$

- Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
  $\frac{LR}{2} = \frac{4}{2} = 2$

  $-1 + 2 = 1$ $\quad -1 - 2 = -3$ $\quad (-3, 4)$ y $(1,4)$

- La gráfica.



Aplica lo aprendido

Actividad 2

1. Escribe la ecuación de la parábola con vértice fuera del origen en sus formas:

Ordinaria	General

2. Realiza en tu cuaderno un mapa conceptual donde expliques el algoritmo para transformar la ecuación de la parábola de su forma general a la forma ordinaria.

3. Explica cómo obtienes los elementos de una parábola a partir de su forma general:

Elemento	Procedimiento para obtenerlo
Coordenadas del vértice	
Parámetro	
Coordenadas del foco	
Lado recto	
Directriz	
Coordenadas de los extremos del lado recto	

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y grafica:

4. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (4,3) y su foco en $F(6, 3)$

5. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (2,0) y su foco en F(0,0)

6. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (-3,3) y su foco en F(-3,6)

7. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3,-1) y su foco en $F(3,-5)$

8. Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada la ecuación $y^2 + 8y + 20x + 56 = 0$, además de todos sus elementos.

9. Encuentra la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada la ecuación $x^2 - 8x - 6y - 8 = 0$, además de todos sus elementos.

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si obtienes ecuación de una parábola con vértice fuera del origen y si eres capaz de transformarla*. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección Retroalimentación al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero cómo identificas hacia dónde abre la parábola correspondiente a cada una de las siguientes ecuaciones:

Ecuación	Hacia dónde abre y por qué
$(y-3)^2 = 12(x+6)$	
$(y+4)^2 = -8(x-2)$	
$(x-2)^2 = -4(y+3$	

Aprende más

Aplicación de los elementos y ecuaciones de la parábola en situaciones de la vida cotidiana

Una parábola aparece al graficar una ecuación cuadrática, la cual en su forma básica se puede escribir como $y = x^2$, pero como observamos en actividades anteriores se puede representar de varias maneras.

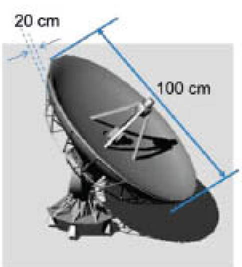
La forma de parábola se produce naturalmente en el mundo físico. Los seres humanos también utilizan formas parabólicas en el diseño de objetos que van desde los puentes, antenas parabólicas, linternas y hasta edificios, que gracias a disposición oblicua, permiten la iluminación del interior a través de todo su perímetro.

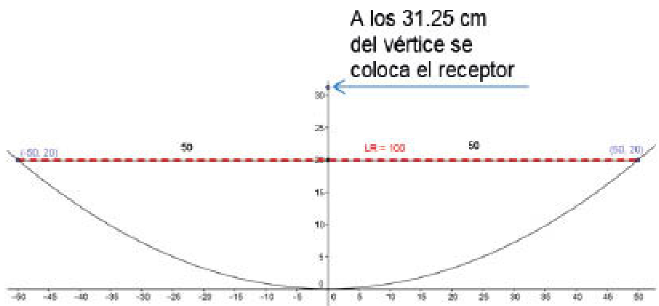
¿Te has dado cuenta de que en muchas situaciones donde se requiere un reflejo de luz la forma del objeto es una parábola? Como las linternas, algún tipo de plafón donde se ponen los focos, algunas lámparas y los faros de los automóviles; esto se debe a que todo rayo luminoso que llega al objeto en dirección paralela al eje de la curva converge en el foco. En las antenas parabólicas ayuda a reflejar las señales que luego van a un receptor, quien interpreta las señales de satélite y muestra los canales transmitidos en tu TV.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 11

Calcula la posición del receptor de una antena para televisión que tiene forma de paraboloide, con un diámetro de 100 cm y 20 cm de profundidad, si éste se coloca en el foco de la antena.





Solución

La parábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice en el origen y el eje de la parábola en el eje y.

De acuerdo con la figura, la ecuación de la parábola tiene la forma $x^2 = 4ay$.

Los valores son $x = 50$, $y = 20$.

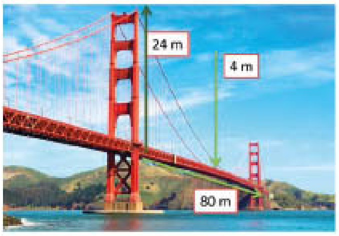
Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

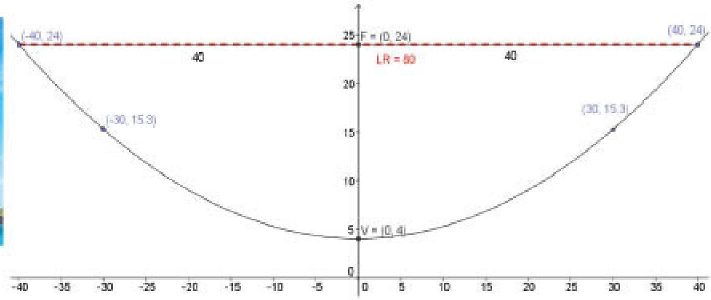
$(50)^2 = 4a(20) \qquad 2500 = 80a \qquad a = \dfrac{2500}{80} \qquad a = 31.25$

El receptor se tendrá que colocar 31.25 cm arriba del vértice del eje de la parábola.

Ejemplo 12

Los cables de un puente colgante forman un arco parabólico como se muestra en la figura. Los pilares que lo sostienen tienen una altura de 24 m sobre el nivel del puente y están separados 80 m. El punto más bajo del cable queda a 4 m sobre el ras del puente. Calcula la altura del cable a 30 m del centro.





Solución

La parábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice 4 m arriba del origen y el eje de la parábola en el eje *y*.

De acuerdo con la figura, la ecuación de la parábola tiene la forma $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, donde $h = 0$ y $k = 4$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

$(x - 0)^2 = 4a(y - 4) \qquad x^2 = 4a(y-4)$

Cuando x = 40 el valor de y = 24, y sustituyendo estos valores en la fórmula anterior:

$(40)^2 = 4a(24-4) \qquad 1600 = 4a(20) \qquad \frac{1600}{20} = 4a \qquad 4a = 80$

Al sustituir el valor de 4a en la ecuación $x^2 = 4a(y-4)$ queda:

$x^2 = 80(y-4)$ y para saber la altura del cable a los 30 m del centro, hacemos $x = 30$

$(30)^2 = 80(y-4) \qquad \frac{900}{80} = y - 4 \qquad 11.3 = y - 4 \qquad 11.3 + 4 = y \qquad y = 15.3$

La altura del cable a los 30 metros del centro es de 15.3 m

Sabías que…

Un puente atirantado es aquel que forma un arco invertido, sostenido por cables de acero del que se suspende el tablero del puente mediante tirantes verticales. El puente Baluarte Bicentenario, ubicado en la Sierra Madre Occidental, en la autopista Mazatlán-Durango, es el atirantado más alto del mundo, por lo que recibió el reconocimiento de la Organización Récord Guinness. La construcción, en su parte central, se suspende sobre una altura de 403 metros desde el suelo, tiene una longitud de 1.1 kilómetros y se sostiene sobre pilares que sujetan 152 tirantes de acero. Su altura supera al Viaducto de Millau, en Francia, cuya altura es de 343 metros.

disponible en http;//mexico.cnn.com/nacional/2012/01/05/el-puente-atirantado-baluarte-es-oficialmente-el-mas-alto-del-mundo Consultada el 31 de *mayo de 2014.*

Aplica lo aprendido

Actividad 3

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios.

1. El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor? Bosqueja la gráfica.

2. El vano del puente Baluarte Bicentenario es de 520 m y con una altura de 169 m de sus torres. Si el punto más bajo está a 2 m del ras del piso, encuentra la altura de un cable que se encuentra a 100 m del centro. Bosqueja la gráfica.

3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 cm del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro, si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco? Bosqueja la gráfica.

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar la aplicación de la parábola en situaciones de la vida diaria.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Menciona al menos otras aplicaciones que creas que se puedan dar a la parábola. Justifica tus respuestas.

Aplicación	Justificación

Cierre de bloque VI

Reflexiona sobre lo aprendido

En este bloque hemos revisado el tema de la parábola y sus implicaciones en la vida cotidiana. Revisamos los siguientes aspectos:

La parábola

Ecuaciones

Elementos de la parábola:

- Vértice
- Foco
- Directriz
- Lado recto
- Eje de la parábola
- Radio vector
- Cuerda

Parábolas según su posición:
vertical / horizontal

Parábolas según su centro:
en el origen o fuera del origen

Evaluación del bloque VI

Lee detenidamente las preguntas de las siguientes páginas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque VI.

Interpretación del nivel de avance:

100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Comprendes la definición de parábola a partir de todos los elementos que la componen.				
	Comprendes las diferentes formas que puede tomar la ecuación de una parábola.				
	Identificas la parábola con centro en el origen.				
	Obtienes la ecuación de una parábola con vértice fuera del origen (forma ordinaria).				
	Transformas la ecuación de una parábola con vértice fuera del origen en su forma general a su forma ordinaria.				
	Comprendes la aplicación de la parábola en la vida cotidiana.				

	Contenidos	Nivel de avance			
		100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Obtienes la ecuación de una parábola en su forma ordinaria a partir del vértice en el origen y su foco.				
	Obtienes todos los elementos de una parábola a partir de su ecuación en su forma ordinaria.				
	Obtienes la ecuación de la parábola en su forma ordinaria dada su ecuación en forma general.				
	Obtienes situaciones cotidianas donde se aplique la ecuación de la parábola.				

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

2. ¿Cómo puedes utilizar lo aprendido en el presente y futuro?

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

Recuerda que deberás integrar las respuestas a tu cuaderno y anotar número de bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VI

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollado)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructivista congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

BLOQUE VII

Aplicas los elementos y las ecuaciones de una elipse

Bloque VII

12 HORAS

Objetos de aprendizaje que se abordan

1. Elementos asociados a la elipse.
2. Forma ordinaria de la ecuación de la elipse con vértice en el origen.
3. Forma ordinaria de la ecuación de la elipse con vértice fuera del origen.
4. Algoritmo para determinar la ecuación de la elipse en su forma ordinaria a partir de la forma general.
5. Aplicación en la solución de problemas y ejercicios de la vida cotidiana.

Productos de aprendizaje

Durante este bloque realizarás los siguientes productos de aprendizaje que pondrán de manifiesto el desarrollo de tus competencias:

- Actividad 1: identificar los elementos asociados a la elipse.
- Actividad 2: forma ordinaria de la ecuación de la elipse.
- Actividad 3: aplicar los elementos y ecuaciones de la elipse en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

Estos productos se evaluarán con los instrumentos que se te presentan al final del bloque.

Competencias disciplinares del campo de las matemáticas

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Evaluación del aprendizaje

- Entregarás tres productos que demuestre que has desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes que integran las competencias.
- En este bloque se te presenta un instrumento de evaluación que te servirá para valorar tus actividades. Y al final del libro se encuentra la sección de retroalimentación que muestra las respuestas modelo o ideas clave que debiste considerar en los productos de aprendizaje.

Introducción

En bloques anteriores estudiamos las distintas formas de expresar las secciones cónicas, como la circunferencia y la parábola. En este último bloque vamos a ver otra sección cónica, que es la elipse.

Con el desarrollo de actividades de aprendizaje y los contenidos revisados aprenderás a:

- Identificar los elementos asociados con la elipse.
- Reconocer la ecuación general y ordinaria de la elipse.
- Aplicar los elementos y ecuaciones de la elipse en la solución de problemas y/o ejercicios de la vida cotidiana.

La figura elíptica se observa en diversas situaciones; la primera de ellas es en el universo, pues el Sistema Solar tiene un movimiento elíptico donde los planetas y las estrellas giran de esta forma alrededor del Sol. Si recuerdas, como lo vimos en la asignatura Física I, fue el gran físico y matemático Isaac Newton quien formuló la ley de la gravitación universal, que explica los movimientos de los planetas y satélites en el Sistema Solar. Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola.

La elipse o semielipse se utiliza también en construcciones arquitectónicas como en los siguientes ejemplos:

¿Con qué propósito?

Reconoces las formas general y ordinaria de las ecuaciones de la elipse, identificando los elementos asociados con ella, para aplicar lo aprendido en la solución de problemas y/o situaciones de la vida cotidiana.


Coliseo romano


Estadio


Fuentes

Para iniciar, reflexiona

Explica dos ejemplos donde resaltes la importancia del uso de la elipse.

____
____
____
____

¿Con qué conocimientos cuento?

Has llegado al bloque VII de Matemáticas III, y para comprenderlo es conveniente recordar los siguientes temas.

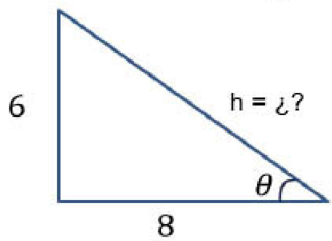
Evaluación diagnóstica.

Instrucciones. Lee detenidamente las indicaciones de los incisos que se muestran enseguida y elabora en tu libro, libreta o cuaderno lo que se te pide.

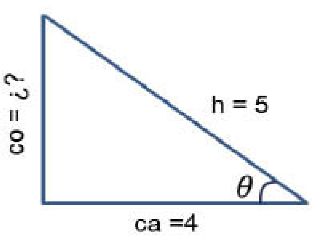
1. Explica brevemente cómo se obtiene una elipse al cortar un cono circular recto con un plano.

____
____
____

2. Dada la siguiente figura calcula la hipotenusa:



3. Dada la siguiente figura calcula el cateto faltante:

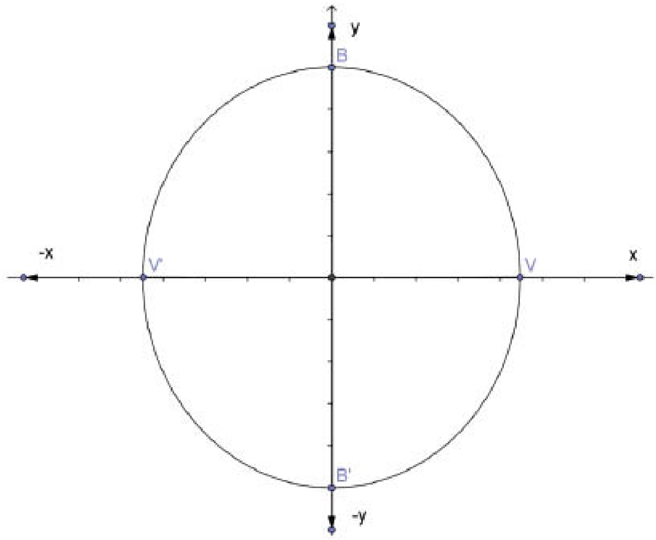


4. Una ecuación equivalente a $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$ es:

a) $49x^2 + 36y^2 = 1$ b) $x^2 + y^2 = 1$ c) $6x^2 + 7y^2 = 42$ d) $49x^2 + 36y^2 = 1764$

Justifica tu respuesta haciendo los cálculos correspondientes.

Dada la siguiente figura:



5. Calcula la extensión de la variable x

6. Calcula la extensión de la variable y

7. Calcula la longitud del segmento $\overline{VV'}$

8. Calcula la longitud del segmento $\overline{BB'}$

Dada la ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$ determina:

9. La extensión de la variable x

10. La extensión de la variable y

Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

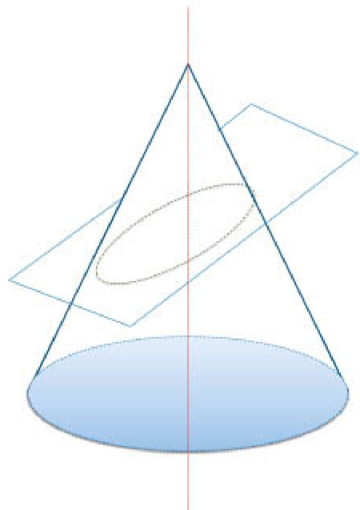
Si de la actividad anterior respondiste correctamente de 8 a 10 preguntas considera tu resultado como Bueno, de 6 a 7 como Regular y si tus respuestas correctas fueron menos de 6 considera tu desempeño como No suficiente, lo que exige que refuerces tus conocimientos previos, repasando tus apuntes de Matemáticas I y II.

¿Cómo consideras el nivel de tus conocimientos previos en función de las respuestas correctas que tuviste?	Bueno	
	Regular	
	No suficiente	

Aprende más

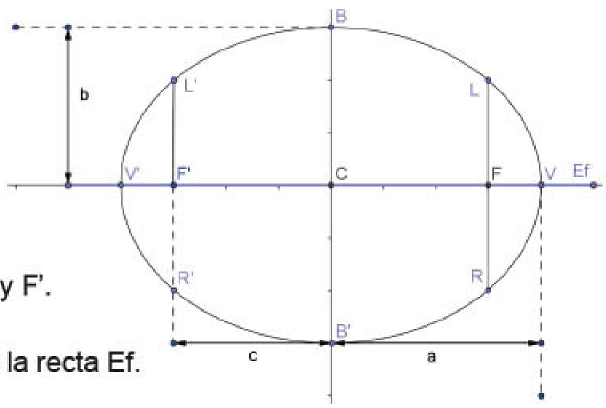
Elementos asociados a la elipse

En el bloque V analizamos las secciones cónicas, que son curvas que se forman cuando un cono doble circular recto se intersecta con un plano; si dicho plano corta de manera oblicua cada generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica, la sección es una elipse.



Elipse: es el lugar geométrico de los puntos del plano cartesiano, cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante y mayor que la distancia entre los focos.

Elementos de la elipse.



- **Vértices:** puntos de intersección de la elipse con su eje focal. Se representan con V y V'.
- **Focos:** puntos fijos. Se representan con F y F'.
- **Eje focal:** recta que pasa por los focos. Es la recta Ef.
- **Centro de la elipse:** punto medio del segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Se representa con C.

- **Eje mayor:** Segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse. Representado por $\overline{VV'}$.

- **Eje menor:** Segmento de recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal. Representado por $\overline{BB'}$.

- **Lado recto:** Segmento de recta perpendicular al eje focal y que pasa por uno de sus focos y cuyos puntos extremos están sobre la elipse. Existen dos lados rectos ya que hay dos focos. Están representados por $\overline{LR}$ y $\overline{L'R'}$.

Aprende más

Forma ordinaria de la ecuación de la elipse con vértice en el origen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Extensión de las variables *x* y *y*

Si tomamos la ecuación de la elipse en su forma ordinaria $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, para eliminar los denominadores se obtiene el mínimo común, que es a^2b^2, resultando:

$$\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2b^2}=1$$

Se pasa el denominador del otro lado multiplicando al 1:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Se despeja la x^2:

$$b^2x^2=a^2b^2-a^2y^2 \quad x^2=\frac{a^2b^2-a^2y^2}{b^2}$$

Se factorizan ambos términos del numerador con a^2

$$x^2=\frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}$$

Se extrae raíz cuadrada a ambos miembros

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2}}$$

Se puede sacar raíz de a^2 y b^2 y quedan fuera de la raíz

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

Para la variable y se realiza el mismo procedimiento, resultando:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Obtención de los elementos de la elipse

- Coordenadas de los vértices

Para ubicar las coordenadas de los vértices, se hace $y = 0$ y se sustituye en la forma ordinaria:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad x^2 = a^2 \qquad x = \pm\sqrt{a^2} \qquad x = \pm a$$

Por lo tanto, las coordenadas de los vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$.

- Coordenadas de los puntos extremos del eje menor

Para ubicar las coordenadas de los puntos extremos del eje menor, se hace $x = 0$ y se sustituye en la forma ordinaria:

$$\frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad y^2 = b^2 \qquad y = \pm\sqrt{b^2} \qquad y = \pm b$$

Por lo tanto, las coordenadas de los puntos extremos del eje menor son:

$B(0, b)$ y $B'(0, -b)$

- Longitud del lado recto

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

- La excentricidad de una elipse

Determina la forma de la curva, es decir, indica qué tan abierta o cerrada está la elipse. Se determina por la fórmula $e = \frac{c}{a}$. Cuanto más pequeña sea y se acerque a cero, se asemejará a una circunferencia (cuando $e = 0$ es una circunferencia).
A medida que el valor de e crece, los focos se alejan del centro.

- Relación entre las cantidades a, b y c de una elipse

En una elipse, a representa la longitud del semieje mayor, b la longitud del semieje menor y c la distancia de su centro a uno de los focos. Estos elementos están por la expresión: $c^2 = a^2 - b^2$

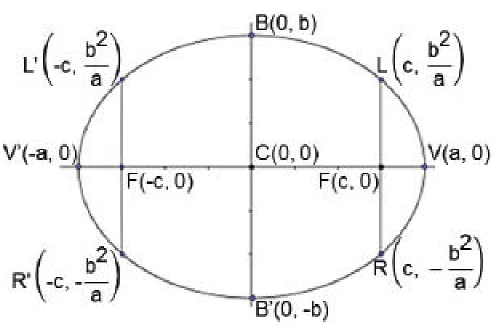
En resumen, la gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ donde } a^2 > b^2 \text{ y } c^2 = a^2 - b^2,$$

es una elipse que tiene las siguientes características:

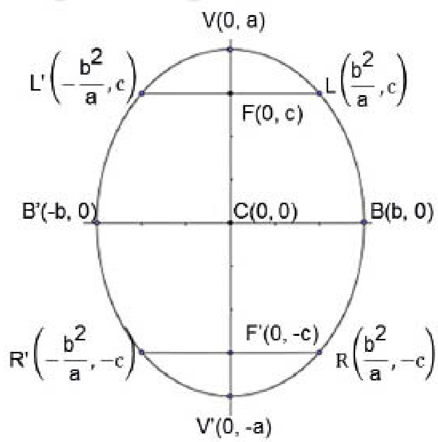
1. Su centro está en el origen $C(0,0)$.
2. Su eje focal está en el eje x.
3. Las coordenadas de sus vértices son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$.
4. Las coordenadas de los puntos extremos de su eje menor son $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$.
5. Las coordenadas de sus focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.
6. La longitud de su eje mayor $\overline{VV'}$ es $2a$.
7. La longitud de su eje menor $\overline{BB'}$ es $2b$.
8. La longitud de su lado recto es $LR = \frac{2b^2}{a}$.

Eje mayor horizontal



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eje mayor vertical



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en *V(0, 5)* y *V'(0, -5)* y sus focos en *F(0, 4)* y *F'(0, -4)*.

Solución

Por los datos, concluimos que es una elipse con vértice en el origen y es vertical, ya que tanto los vértices como los focos tienen abscisa 0, lo que indica que su eje focal está sobre el eje *x*.

Por lo tanto, tiene la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, por lo que procedemos a calcular los valores de *a* y *b*.

Como las coordenadas de sus vértices son *V*(0, *a*) y *V'*(0, -*a*),
el valor de *a* = *5* y por las coordenadas del foco *F*(0, *c*) y *F'*(0, -*c*), el valor de *c* = *4.*

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ y despejamos b^2, obteniendo $c^2 - a^2 = -b^2$, que al multiplicar toda la ecuación por (-1) obtenemos: $b^2 = a^2 - c^2$
y sustituyendo los valores de a y c:

$b^2 = (5)^2 - (4)^2 \qquad b^2 = 25 - 16 \qquad b^2 = 9 \qquad b = \pm\sqrt{9} \qquad b = \pm 3$

Sustituyendo los valores de a y b en la forma ordinaria de la ecuación de la elipse:

$\frac{x^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(5)^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ que es la ecuación de la elipse.

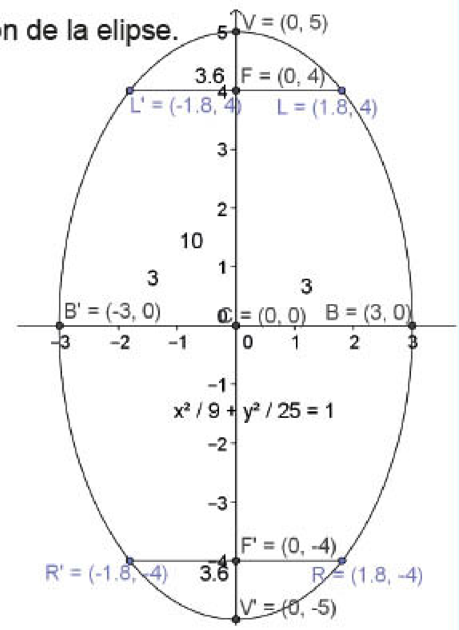
Calculamos las coordenadas del lado recto:

$L = \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \qquad L = \left(\frac{9}{5}, 4\right)$

$L' = \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(-\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \qquad L' = \left(-\frac{9}{5}, 4\right)$

$R = \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(\frac{(3)^2}{5}, -4\right) \qquad R = \left(\frac{9}{5}, -4\right)$

$R' = \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(-\frac{(3)^2}{5}, -4\right) \qquad R' = \left(-\frac{9}{5}, -4\right)$



Ejemplo 2

Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una elipse horizontal, puesto que *a* es mayor que *b*:

a) Las coordenadas de los focos

$a^2 = 16$ y $b^2 = 7$, por lo que calculamos

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 16 - 7 = 9$

$c = \pm\sqrt{9}$

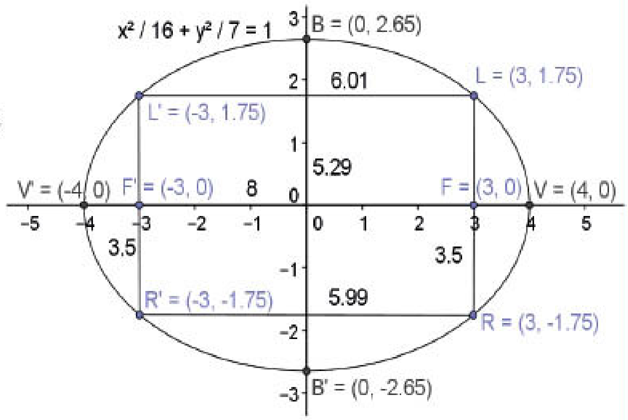
$c = \pm 3$

Como las coordenadas están en *F*(c, 0) y *F'*(-c, 0) y tenemos *F*(3, 0) y *F'*(-3, 0)

b) Las coordenadas de sus vértices son

V(a, 0) y *V'*(-a, 0), y como $a^2 = 16$ $a = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

tenemos *V*(4, 0) y *V'*(-4, 0)



c) La longitud del lado recto *LR*

$LR = \frac{2b^2}{a}$ como $b^2 = 7$ $b = \pm\sqrt{7} = \pm 2.6$

$LR = \frac{2(2.6)^2}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$

d) Las coordenadas del lado recto

$L = \left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ $L = \left(3, \frac{7}{4}\right)$

$L' = \left(-c, \frac{b^2}{a}\right)$ $L' = \left(-3, \frac{7}{4}\right)$

d) Coordenadas de los extremos del eje menor:

B(0, b) y *B'*(0, -b) *B*(0, 2.6) y *B'*(0, -2.6)

e) La longitud del eje mayor

$\overline{VV'} = 2a$ $\overline{VV'} = 2(4)$ $\overline{VV'} = 8$

f) La longitud del eje menor

$\overline{BB'} = 2b$ $\overline{BB'} = 2(2.6)$ $\overline{BB'} = 5.2$

Ejemplo 3

Dada la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ determina todos sus elementos.

Solución

Se dividen ambos miembros de la ecuación anterior entre 36 y da como resultado:

$$\frac{4x^2+9y^2}{36} = \frac{36}{36} \qquad \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una elipse horizontal, puesto que a es mayor que b:

a) Las coordenadas de los focos

$a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo que calculamos

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 9 - 4 = 5$

$c = \pm\sqrt{5}$

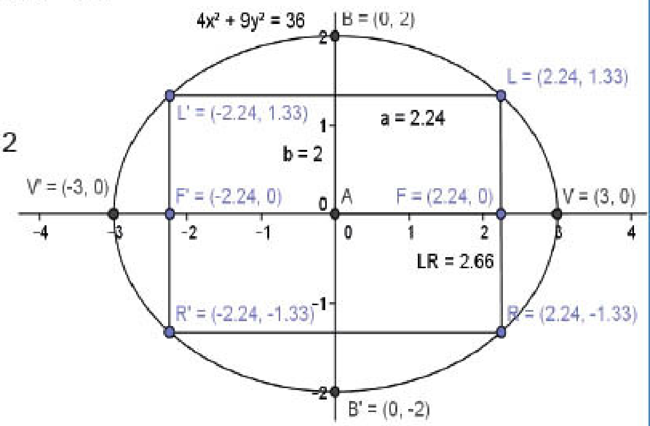
$c = \pm 2.2$

Como las coordenadas están en $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ tenemos $F(2.2, 0)$ y $F'(-2.2, 0)$

b) Las coordenadas de sus vértices son:

$V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, y como $a^2 = 9$ $\ a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

y tenemos $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$



c) La longitud del lado recto LR

$LR = \frac{2b^2}{a}$ como $\quad b^2 = 4 \quad b = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$LR = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3} = 2.7$

d) Las coordenadas del lado recto

$L = \left(c, \frac{b^2}{a}\right) \qquad L = \left(2.2, \frac{4}{3}\right)$

$L' = \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \qquad L' = \left(-2.2, \frac{4}{3}\right)$

e) Coordenadas de los extremos del eje menor

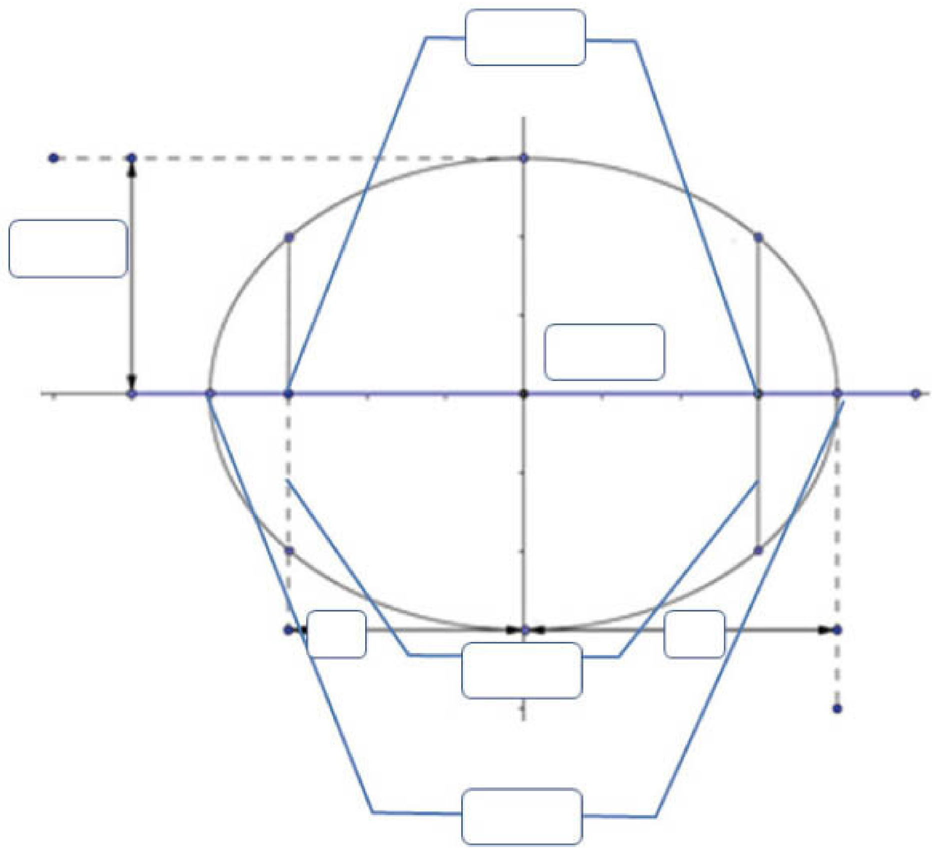
$B(0, b)$ y $B'(0, -b) \quad B(0, 2)$ y $B'(0, -2)$

Aplica lo aprendido

Actividad 1

Instrucciones. Resuelve los siguientes ejercicios realizando las operaciones necesarias en tu libro, libreta o cuaderno. Registra y reflexiona tus respuestas, comenta los resultados con tus compañeros y escucha sus conclusiones para mejorar tu trabajo.

1. Escribe dentro del recuadro el nombre o la variable que corresponde a cada elemento de la elipse.



Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

2. Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en $V(0, 6)$ y $V'(0, -6)$ y sus focos en $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$.

3. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

4. Dada la ecuación de la elipse $16x^2 + 4y^2 = 16$ determina todos sus elementos.

5. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si identificas el concepto de elipse, sus elementos y su ecuación con vértice en el origen.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

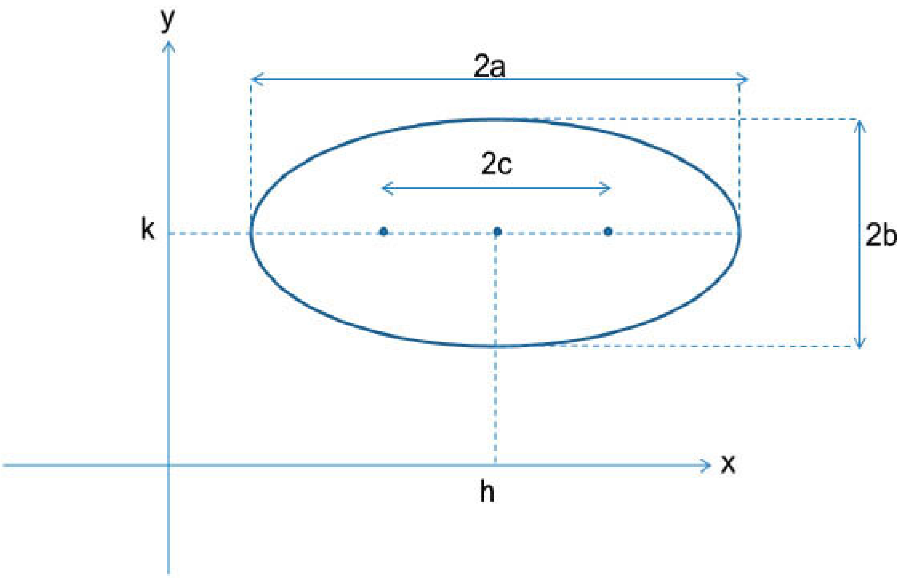
Reúnete con un compañero y explícale cómo determinar cuándo el eje de una elipse es horizontal y cuándo es vertical. Justifica tus respuestas.

Eje horizontal	Eje vertical

Aprende más

Forma ordinaria de la ecuación de la elipse con vértice fuera del origen

La ecuación de una elipse, ya sea horizontal o vertical, cuyo vértice está fuera del origen y que se encuentra en el punto $v(h,k)$, se obtiene reemplazando x por $x - h$ y y por $y - k$ en la ecuación básica de la elipse con vértice en el origen, al igual que se hizo con la parábola y la circunferencia.

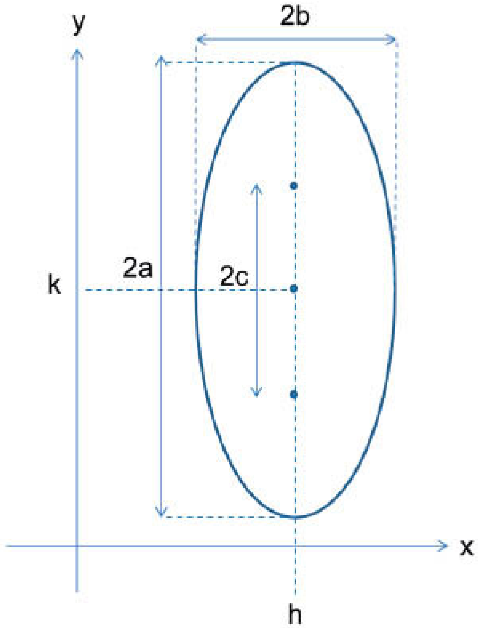


Entonces, la ecuación se transforma en: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, que es la *forma ordinaria de la elipse con vértice fuera del origen y eje focal en el eje x*.

Y sus elementos se conforman por:

- Coordenadas del centro $C(h,k)$
- Coordenadas de los vértices del eje mayor $V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$
- Coordenadas de los vértices del eje menor $B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$
- Coordenadas de los focos $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$
- Longitud del lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Longitud del lado mayor $2a$
- Longitud del lado menor $2b$
- Longitud del eje focal $2c$

Para la *elipse con vértice fuera del origen y eje focal en el eje y*, tenemos:



La ecuación es: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{c^2} = 1$, que es la *forma ordinaria de la elipse con vértice fuera del origen y eje focal en el eje y.*

Y sus elementos se conforman por:

- Coordenadas del centro $C(h, k)$
- Coordenadas de los vértices del eje mayor $V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$
- Coordenadas de los vértices del eje menor $B(h + b, k)$ y $B'(h - b, k)$
- Coordenadas de los focos $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$
- Longitud del lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$
- Longitud del lado mayor $2a$
- Longitud del lado menor $2b$
- Longitud del eje focal $2c$

La *ecuación de la elipse en su forma general* es: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
Donde A y C son diferentes de cero y tienen el mismo signo.

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, dados $C(7, -2)$, eje mayor = 8, eje menor = 4 y eje focal paralelo al eje X.

Solución

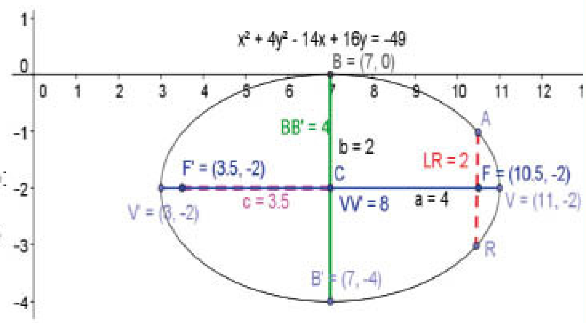
Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una ecuación de la forma
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ donde $h = 7$ y $k = -2$
Dada la longitud del lado mayor $2a = 8$ despejamos a: $a = \frac{8}{2}$ $a = 4$
Dada la longitud del lado menor $2b = 4$ despejamos b: $b = \frac{4}{2}$ $b = 2$
Como $c^2 = a^2 - b^2$ $c^2 = (4)^2 - (2)^2 = 16 - 4$ $c^2 = 12$ $c = \sqrt{12}$ $c = 3.5$

a) Al sustituir estos valores en la ecuación en forma ordinaria:

$$\frac{(x-7)^2}{(4)^2} + \frac{(y-(-2))^2}{(2)^2} = 1 \quad \frac{(x-7)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

b) Desarrollamos para la ecuación en forma general:
Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (16 x 4 = 64):

$$\frac{64(x-7)^2}{16} + \frac{64(y+2)^2}{4} = 1(64)$$



Y dividiendo entre los denominadores:
$4(x-7)^2 + 16(y+2)^2 = 64$

Desarrollando los binomios y multiplicando:
$4(x^2 - 14x + 49) + 16(y^2 + 4y + 4) = 64$
$4x^2 - 56x + 196 + 16y^2 + 64y + 64 - 64 = 0$

Reduciendo términos y acomodando:
$4x^2 + 16y^2 - 56x + 64y + 196 = 0$

c) Las coordenadas de los vértices del eje mayor
$V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$ $V(7 + 4, -2)$ y $V'(7 - 4, -2)$ $V(11,-2)$ y $V'(3, -2)$

d) Las coordenadas de los vértices del eje menor
$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$ $B(7, -2 + 2)$ y $B'(7, -2 - 2)$ $B(7, 0)$ y $B'(7, -4)$

e) Las coordenadas de los focos
$F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$ $F(7 + 3.5, -2)$ y $B'(7 - 3.5, -2)$ $F(10.5, -2)$ y $F'(3.5, -2)$

f) La longitud del lado recto LR
$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{4} = \frac{2(4)}{4} = \frac{8}{4}$ $LR = 2$

g) La longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a = 2(4)$ $\overline{VV'} = 8$

h) La longitud del lado menor $\overline{BB'} = 2b = 2(2)$ $\overline{BB'}$ 4

Ejemplo 5

Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, dados $V(-2, 3)$, $V'(-2, -5)$, $F(-2, 2)$ y $F'(-2, -4)$.

Solución

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una ecuación de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Como la longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a$ y la diferencia entre las ordenadas de sus vértices es $3 - (-5) = 8$, igualamos $2a = 8$ y despejamos a: $a = = \frac{8}{2}$ $\quad a = 4$

Como la longitud del eje focal $\overline{CC'} = 2c$ y la diferencia entre las ordenadas de sus focos es $2 - (-4) = 6$, igualamos $2c = 6$ y despejamos c: $c = = \frac{6}{2}$ $\quad c = 3$

Como $c^2 = a^2 - b^2 \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad b^2 = (4)^2 - (3)^2 = 16 - 9 \quad b^2 = 7 \quad b = \sqrt{7} \quad b = 2.65$

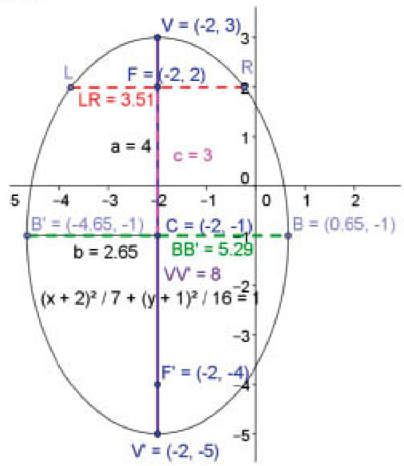
El centro es el punto medio de los vértices, por lo que para calcular sus coordenadas:

$$\text{Pm} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{(-2) + (-2)}{2}, \frac{3 + (-5)}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (-2\ -1)$$

Coordenadas del centro $C(h, k)$ $\quad C(-2, -1)$

a) Al sustituir estos valores en la ecuación en forma ordinaria:

$$\frac{(x-(-2))^2}{(2.65)^2} + \frac{(y-(-1))^2}{(4)^2} = 1 \quad \frac{(x+2)^2}{7} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$



b) Desarrollamos para la ecuación en forma general:

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (7 x 16 = 112):

$$\frac{102(x+2)^2}{7} + \frac{102(y+1)^2}{16} = 1(112)$$

Y dividiendo entre los denominadores.

$16(x + 2)^2 + 7(y + 1)^2 = 112$

Desarrollando los binomios y multiplicando:

$16(x^2 + 4x + 4) + 7(y^2 + 2y + 1) = 112$

$16x^2 + 64x + 64 + 7y^2 + 14y + 7 - 112 = 0$

Reduciendo términos y acomodando:

$16x^2 + 7y^2 + 64x + 14y - 41 = 0$

c) Las coordenadas de los vértices del eje menor

$B(h + b, k)$ y $B'(h - b, k)$ $\quad B(-2+2.65, -1)$ $\quad B'(-2 - 2.65, -1)$

$B(0.65, -1)$ y $B'(-4.65, -1)$

d) La longitud del lado recto LR

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2.65)^2}{4} = \frac{2(7)}{4} = \frac{14}{4} \quad LR = 3.5$$

e) La longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a = 2(4)$ $\quad \overline{VV'} = 8$

f) La longitud del lado menor $\overline{BB'} = 2b = 2(2.65)$ $\quad \overline{BB'} = 5.3$

Para saber más

Algoritmo para determinar la ecuación de la elipse en su forma ordinaria a partir de la forma general

Para transformar la ecuación de la elipse de su forma general a la forma ordinaria, hay que seguir el algoritmo:

1. Se separan los términos de *x* en un paréntesis y los términos de *y* en otro paréntesis, pasando el término independiente (el número solo) del lado derecho.

2. Se factorizan ambos paréntesis con el máximo común divisor (mcd) de cada uno.

3. Se completa el trinomio cuadrado perfecto de cada paréntesis, dividiendo el segundo término de cada paréntesis entre 2 y elevando el resultado al cuadrado, agregando del lado derecho los números que se sumaron, para mantener el equilibrio entre las ecuaciones.

4. Se factorizan ambos paréntesis de modo que cada uno quede como un binomio al cuadrado y del lado derecho se reducen términos, quedando la ecuación de la forma $b^2(x-h) + a^2(y-k)^2 = ab$.

5. Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término de la derecha (a^2b^2) separando el lado izquierdo en dos fracciones.

6. Se simplifican las fracciones del lado izquierdo para llegar a la forma ordinaria.

7. Se calculan los elementos de la elipse dependiendo de la forma, si es con eje focal horizontal o eje focal vertical. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Ejemplo 6

Dada la ecuación de la elipse en su forma general $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$, transformarla a su forma ordinaria y calcular todos sus elementos.

Solución

1. Se separan los términos de x en un paréntesis y los términos de y en otro paréntesis, pasando el término independiente (el número solo) del lado derecho.
   $(x^2 - 24x) + (9y^2 + 18y) = -9$

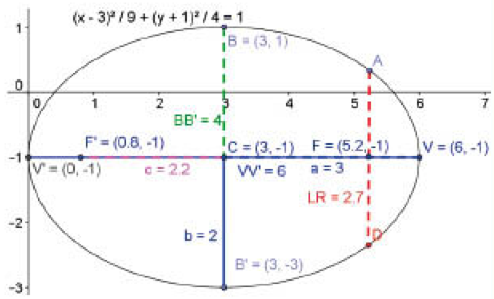
2. Se factorizan ambos paréntesis con el máximo común divisor (mcd) de cada uno.
   $4(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) = -9$

3. Se completa el trinomio cuadrado perfecto de cada paréntesis, dividiendo el segundo término de cada paréntesis entre 2 y elevando el resultado al cuadrado, agregando del lado derecho los números que se sumaron para mantener el equilibrio entre las ecuaciones.
   $$4\left(x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) + 9\left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = -9 + 4\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{2}\right)^2$$
   $$4(x^2 - 6x + (3)^2) + 9(y^2 + 2y + (1)^2) = -9 + 4(3)^2 + 9(1)^2$$
   $$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) = -9 + 36 + 9$$

4. Se factorizan ambos paréntesis de modo que cada uno quede como un binomio al cuadrado, y del lado derecho se reducen términos quedando la ecuación de la forma
   $b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$
   $$4(x - 3)^2 + 9(y - 1)^2 = 36$$

5. Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término de la derecha (a^2b^2), separando el lado izquierdo en 2 fracciones.
   $$\frac{4(x-3)^2 + 9(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36} \qquad \frac{4(x-3)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

6. Se simplifican las fracciones del lado izquierdo para llegar a la forma ordinaria
   $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$



Como $a > b$, la elipse tiene su foco en el eje horizontal

Elementos:

a) Las coordenadas del centro
   $C(h, k)$ $\quad h = 3 \quad k = -1 \qquad C(3, -1)$

b) Los valores de a, b y c
   Como $a^2 = 9 \quad a = \pm\sqrt{9} \qquad a = \pm 3$
   Como $b^2 = 4 \quad b = \pm\sqrt{4} \qquad b = \pm 2$
   $c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = 9 - 4 = 5 \quad c = \pm\sqrt{5} \quad c = \pm 2.2$

c) Las coordenadas de los vértices del eje mayor

$V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$ $\quad V(3 + 3, -1)$ y $V'(3 - 3, -1)$ $\quad V(6, -1)$ y $V'(0, -1)$

d) Las coordenadas de los vértices del eje menor

$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$ $\quad B(3, -1 + 2)$ y $B'(3, -1 - 2)$ $\quad B(3, 1)$ y $B'(3, -3)$

e) Las coordenadas de los focos

$F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$ $\quad F(3 + 2.2, -1)$ y $B'(3 - 2.2, -1)$ $\quad F(5.2, -1)$ y $F'(0.8, -1)$

f) La longitud del lado recto LR

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3} \qquad LR = 2.7$$

g) La longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a = 2(3)$ $\quad \overline{VV'} = 6$

h) La longitud del lado menor $\overline{BB'} = 2b = 2(2)$ $\quad \overline{BB'} = 4$

i) La excentricidad $e = \frac{c}{a}$ $\qquad e = \frac{2.2}{3}$ $\qquad e = 0.7$

Aplica lo aprendido

Actividad 2

1. Escribe la ecuación de la elipse con vértice fuera del origen en sus formas:

Ordinaria	General

2. Realiza en tu cuaderno un mapa conceptual donde expliques el algoritmo para transformar la ecuación de la elipse de su forma general a la forma ordinaria.

3. Explica cómo obtienes los elementos de una elipse a partir de su forma general:

Elemento	Procedimiento
Coordenadas de los vértices del eje mayor	
Coordenadas de los vértices del eje menor	
Coordenadas de los focos	
Lado recto	
Longitud del eje mayor ($\overline{VV'}$)	
Longitud del lado menor ($\overline{BB'}$)	

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y grafica:

4. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, dados C(4, 2), eje mayor = 14, eje menor = 10 y eje focal paralelo al eje *y*.

5. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, dados $V(8, 1)$, $V'(2, 1)$, $F(3, 1)$ y $F'(7, 1)$.

6. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, transformarla a su forma ordinaria y calcular todos sus elementos.

7. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, cuyo centro es C(3, -4) con eje focal paralelo al eje *x*, longitud del eje mayor 10 y excentricidad $\frac{4}{5}$, también determina todos sus elementos.

8. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general cuyo centro está en $C(-2,1)$, con eje focal paralelo al eje *y*, longitud del lado menor 16, longitud de lado recto = $\frac{32}{3}$ dados además de todos sus elementos.

9. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, dados los vértices $V(6,4)$ y $V'(-2, 4)$ y focos $F(5, 4)$ y $F'(-1, 4)$, además de todos sus elementos.

10. Dada la ecuación de la elipse en su forma general
$9x^2 + 5y^2 - 18x - 40y + 44 = 0$
Transformarla a su forma ordinaria y calcular todos sus elementos.

Con la realización de estos ejercicios podrás *valorar si eres capaz de obtener las diferentes formas de la ecuación de una elipse.* Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad
¿De qué te das cuenta?

En parejas, explica a un compañero cómo determinas los elementos de la elipse a partir de la ecuación: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

Elemento	Cómo se determina
Coordenadas de los vértices del eje mayor	
Coordenadas de los vértices del eje menor	
Coordenadas de los focos	
Lado recto	
Longitud del eje mayor (VV’)	
Longitud del lado menor (BB’)	
La excentricidad	

Aprende más

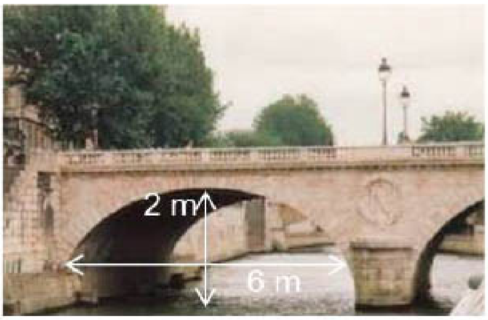
Aplicación de los elementos y ecuaciones de la elipse en la solución de problemas y ejercicios de la vida cotidiana

La elipse tiene varias aplicaciones en la vida cotidiana de los seres humanos. Se utiliza en arquitectura como los puentes con forma semielítptica, en aparatos médicos, tal es el caso de un instrumento que sirve para deshacer cálculos en el riñón utilizando reflectores elípticos de ultrasonido.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7

El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco mide 6 m y la parte más alta del arco mide 2 m arriba del agua, como muestra la figura. Encuentra la altura a los 2 m de la base.



Solución

Como la longitud del eje mayor es 6 m y es igual a $2a$, tenemos $2a = 6$ y despejamos a:

$a = \frac{6}{2}$ $\quad a = 3$

La altura del puente es 2 m, que corresponde al valor de b.

Sustituimos estos valores en la ecuación de la elipse con vértice en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Como se quiere calcular la altura a los 2 metros de la base, hacemos $x = 2$, valor que se sustituye en la ecuación anterior:

$$\frac{(2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Se despeja la variable y:

$$\frac{4}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{4}{9}$$

Se pasa multiplicando el 4 al lado derecho:

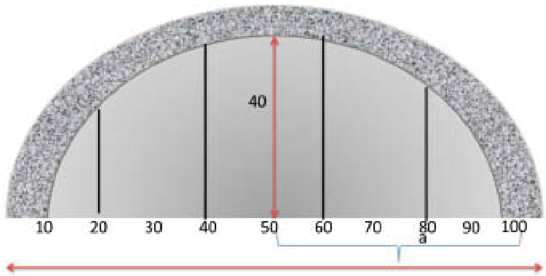
$$y^2 = 4\left(1 - \frac{4}{9}\right) \qquad y^2 = 4 - \frac{16}{9} \qquad y^2 = \frac{32}{9} \qquad y = \sqrt{\frac{32}{9}} \qquad y = 1.9 \text{ m}$$

A los 2 metros de la base el puente tendrá una altura de 1.9 m

Ejemplo 8

Se desea tapar con unos barrotes un pequeño túnel con forma semielíptica, cuya longitud en la base es de 1 m y altura de 40 cm, y le piden que los barrotes estén colocados cada 20 cm. Determina la altura de cada barrote para el túnel.

Solución



Como la longitud del eje mayor es 100 cm y es igual a $2a$,
tenemos $2a = 100$ y despejamos a:

$a = \frac{100}{2}$ $\quad a = 50$

La altura del puente es 40 cm, que corresponde al valor de b.

Sustituimos estos valores en la ecuación de la elipse con vértice en el origen:

$$\frac{x^2}{(50)^2} + \frac{y^2}{(40)^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{2500} + \frac{y^2}{1600} = 1$$

Como se quiere calcular la altura a los 10 cm del centro de la base, hacemos $x = 10$, valor que se sustituye en la ecuación anterior:

$$\frac{(10)^2}{2500} + \frac{y^2}{1600} = 1$$

Se despeja la variable y:

$$\frac{100}{2500} + \frac{y^2}{1600} = 1 \qquad \frac{y^2}{1600} = 1 - \frac{100}{2500}$$

Se pasa multiplicando el 1600 al lado derecho:

$$y^2 = 1600\left(1 - \frac{100}{2500}\right) \qquad y^2 = 1600 - \frac{160000}{2500} \qquad y^2 = 1600 - 64 \qquad y = \sqrt{1536} \qquad y = 39.2 \text{ cm}$$

A los 40 cm, el barrote tendrá 39.2 cm de altura, al igual que a los 60 cm por la simetría de la elipse. Como se quiere calcular la altura a los 30 cm del centro de la base, hacemos $x = 30$, valor que se sustituye en la ecuación anterior:

$$\frac{(30)^2}{2500} + \frac{y^2}{1600} = 1$$

Se despeja la variable y:

$$\frac{900}{2500} + \frac{y^2}{1600} = 1 \qquad \frac{y^2}{1600} = 1 - \frac{900}{2500}$$

Se pasa multiplicando el 1600 al lado derecho:

$$y^2 = 1600\left(1 - \frac{900}{2500}\right) \qquad y^2 = 1600 - \frac{1440000}{2500} \qquad y^2 = 1600 - 576 \qquad y = \sqrt{1024} \qquad y = 32 \text{ cm}$$

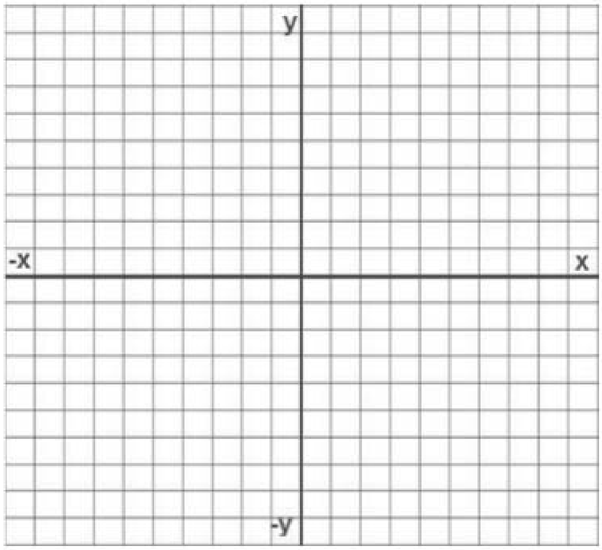
A los 20 cm, el barrote tendrá 32 cm de altura, al igual que a los 80 cm por la simetría de la elipse.

Aplica lo aprendido

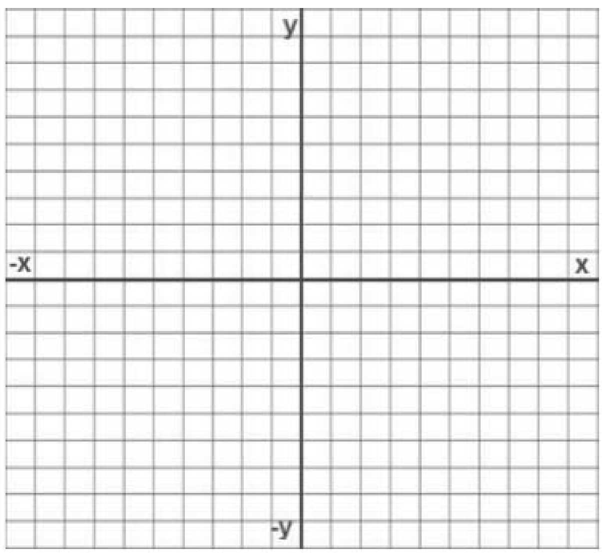
Actividad 3

Realiza los siguientes ejercicios y grafica

1. El arco de un puente es semielíptico con eje mayor horizontal. La base del arco mide 8 m de un lado y la parte más alta del arco mide 3 m arriba de la horizontal. Encuentra la altura a los 3 m de la base. Bosqueja la gráfica.



2. A un herrero le mandan hacer las protecciones para una puerta con forma semielíptica, cuya longitud en la base es de 1.5 m y altura de 80 cm, y le piden que coloques protecciones cada 25 cm. Determina la altura de cada barra de protección para la puerta.



Con la realización de estos ejercicios podrás identificar la aplicación del concepto de elipse en situaciones de la vida cotidiana. Para verificar los logros obtenidos en esta actividad y realizar tu autoevaluación, consulta la sección de *Retroalimentación* al final del libro.

Guarda el desarrollo y la solución de esta actividad en tu portafolio de evidencias.

Reflexionemos sobre la actividad

¿De qué te das cuenta?

Menciona al menos tres aplicaciones de elipse que observas en tu entorno. Justifica tus respuestas.

Aplicación	Justificación

Cierre de bloque VII

Reflexiona sobre lo aprendido

Lee detenidamente las preguntas y responde colocando una (X) en el nivel de avance que consideras que has logrado a lo largo del bloque VII.

Interpretación del nivel de avance:
100-90% = Lo logré de manera independiente
89-70% = Requerí apoyo para construir el aprendizaje
69-50% = Fue difícil el proceso de aprendizaje y sólo lo logré parcialmente
49% o menos = No logré el aprendizaje

		Nivel de avance			
	Contenidos	100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Conceptuales	Comprendes la definición de elipse a partir de todos los elementos que la componen.				
	Comprendes las diferentes formas que puede tomar la ecuación de una elipse.				
	Identificas la elipse con centro en el origen.				
	Obtienes la ecuación de una elipse con vértice fuera del origen (forma ordinaria).				
	Transformas la ecuación de una elipse con vértice fuera del origen en su forma general a su forma ordinaria.				
	Comprendes la aplicación que puede tener la elipse en la vida cotidiana.				

	Contenidos	Nivel de avance 100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Procedimentales	Obtienes la ecuación de una elipse en su forma ordinaria a partir del vértice en el origen y su foco.				
	Obtienes todos los elementos de una elipse a partir de su ecuación en su forma ordinaria.				
	Obtienes la ecuación de la elipse en su forma ordinaria dada su ecuación en forma general.				
	Resuelves situaciones cotidianas donde se aplique la ecuación de la elipse.				

	Contenidos	Nivel de avance 100-90%	89-70%	69-50%	49% o menos
Actitudinales	Valoras la importancia del trabajo con orden y limpieza al desarrollar cada una de las actividades de aprendizaje.				
	Compartes ideas mediante productos con otras personas para promover el trabajo colaborativo.				

Instrucciones. Responde en forma breve a cada interrogante en las líneas correspondientes:

1. ¿Cuáles han sido los aprendizajes más significativos en este bloque y por qué?

____

____

____

2. ¿Cómo puedes utilizar lo aprendido en el presente y futuro?

____

____

3. ¿Cómo asocias lo aprendido en beneficio de tu comunidad y a qué te compromete?

____

____

Recuerda que deberás integrar las respuestas tu cuaderno, y anotar número del bloque, de la actividad y fecha.

Registro del avance

Competencias genéricas y disciplinares del bloque VII

Instrucciones. Al concluir el bloque, registra el nivel de avance que lograste en el desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares. Utiliza la siguiente escala:

A = Alto (La he desarrollada)
M = Medio (En proceso de desarrollo)
B = Bajo (No la he desarrollado)

Competencias genéricas	Atributos	Nivel de avance
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas y gráficas; asimismo, interpreta tablas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.	
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.	
7. Aprende por iniciativa e interés propios a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructivista congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	

Competencias disciplinares	Nivel de avance
• Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	
• Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	
• Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
• Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático, y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.	
• Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	
• Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	
• Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Al completar la tabla valora los avances registrados.

- Ángulo de inclinación de una recta: es el menor de los ángulos que forma una recta con el eje horizontal *x*, medido siempre en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- Circunferencia*:* es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que están a la misma distancia (radio) de un punto fijo llamado centro.
- Condición de paralelismo*:* si dos rectas no verticales son paralelas, tienen pendientes y ángulos de inclinación iguales. Esto es, $m_A = m_B$.
- Condición de perpendicularidad: para que dos rectas sean perpendiculares (ninguna de ellas vertical) el producto o multiplicación de sus pendientes debe ser igual a –1.
- Cónica: se deriva de la palabra cono, que en geometría es una figura que puede formarse a partir de una recta que se hace girar con respecto a un eje.
- Eje focal: recta que pasa por los focos.
- Eje mayor: segmento de recta cuyos puntos extremos son los vértices de la elipse.
- Eje menor*:* segmento de recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal.
- Eje horizontal*:* se le denomina eje de las abscisas o eje de las *x*.
- Eje vertica*l:* se le denomina eje de las ordenadas o eje de las *y.*
- Elipse: es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano cartesiano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
- Extensión de una gráfica: son los intervalos de variación para los que los valores de x y de y son reales.
- Foco*:* Punto fijo que se utiliza en la generación de las cónicas.
- Generatriz*:* es la recta generadora que se hace girar con respecto a un eje para formar un cono.
- Intersección con los ejes*:* son los puntos (si es que existen) donde la gráfica de una ecuación pasa por los ejes horizontal y vertical.
- Lado recto: segmento de recta perpendicular al eje focal y que pasa por uno de los focos y cuyos puntos extremos están sobre la elipse o circunferencia.
- Parábola*:* es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano, cuya distancia de un punto fijo llamado foco es igual a la distancia a una recta fija, llamada directriz.
- Pareja ordenada de números: son un agrupamiento de elementos tomados de dos en dos y siguiendo un orden preestablecido.
- Plano cartesiano*:* es una disposición que consta de 2 ejes (eje *x* o de las abscisas y eje *y* o de las ordenadas), formándose entre ellos 4 cuadrantes que se ordenan a partir del cuadrante superior derecho y en contra de las manecillas del reloj.
- Pendiente de una recta*:* es el grado (medida) de inclinación de una recta, es decir, la razón de cambio en *y* con respecto al cambio en *x*. Se representa con la letra *m*.

- Perímetro: en un polígono o figura cualesquiera es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica.
- Punto de división: es el punto $P(x,y)$ que divide a un segmento de recta en una razón dada.
- Punto medio de un segmento de recta: es aquel que se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos y divide al segmento en una razón de 1.
- Recta: conjunto de puntos colocados unos detrás de otros en la misma dirección.
- Rectas paralelas: son aquellas rectas que corren en una misma dirección y nunca se juntan.
- Rectas perpendiculares: son aquellas rectas que se cruzan entre sí formando un ángulo recto.
- Secciones cónicas: son curvas que se forman cuando un cono doble circular recto se intersecta con un plano.
- Segmento de recta: es la distancia comprendida entre dos puntos A y B, representada como (AB).
- Vértice: punto de una curva en que la curvatura tiene un máximo o un mínimo.

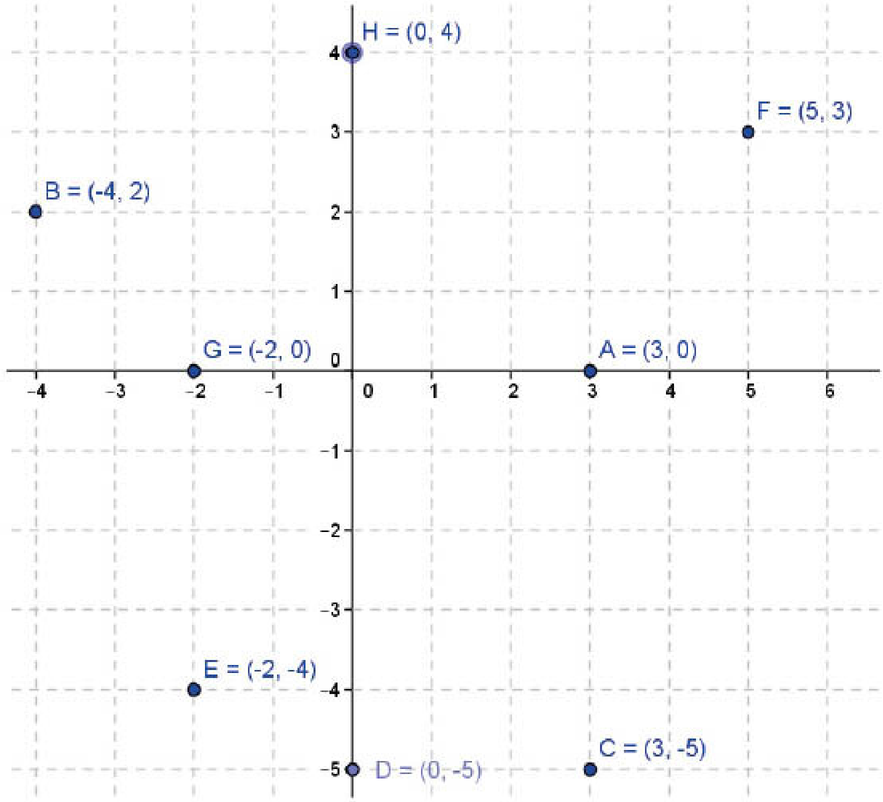
Retroalimentación de las actividades

Bloque I

Evaluación diagnóstica.

1. Las coordenadas de los vértices del rectángulo son $A(-2,-2)$, $B(-2,2)$, $C(3,2)$, $D(3,-2)$

2.



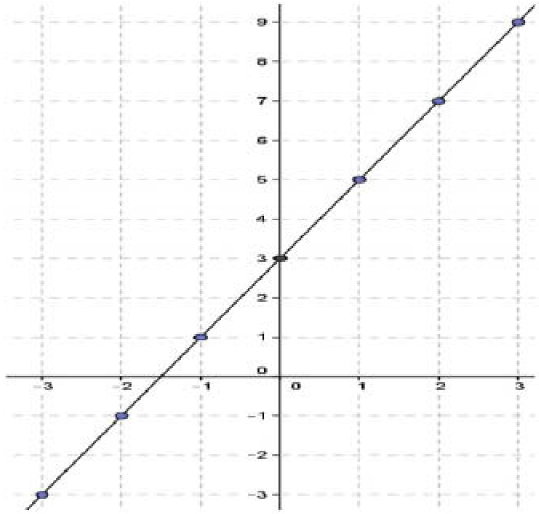
3. Haciendo $y = 0$, $\quad 0 = 2x - 4 \qquad 4 = 2x \qquad \frac{4}{2} = x \qquad x = 2$

4. Haciendo $x = 0$, $\quad y = 3(0) + 2 \qquad y = 0 + 2 \qquad y = 2$

5. Rectas paralelas: son aquellas rectas equidistantes entre sí y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse.
   Rectas perpendiculares: son dos líneas que se intersectan entre sí formando un ángulo de 90°.
   Rectas oblicuas: son dos líneas que se intersectan entre sí formando un ángulo diferente de 90°.

6. Traza la gráfica de la ecuación $y = 2x + 3$

x	$y = 2x + 3$
-3	$2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$
-2	$2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
-1	$2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$
0	$2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$
1	$2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$
2	$2(2) + 3 = 4 + 3 = 7$
3	$2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$



7. Despeja la variable x de la ecuación $2x^2 - 4y^2 = 16$

$2x^2 = 16 + 4y^2$ $\quad x^2 = \dfrac{16 + 4y^2}{2}$ $\quad x = \sqrt{\dfrac{16 + 4y^2}{2}}$ $\quad x = \sqrt{8 + 2y^2}$

8. Despeja la variable y de la ecuación $2x^2 - 4y^2 = 16$

$2x^2 = 16 + 4y^2$ $\quad 2x^2 - 16 = 4y^2$ $\quad y^2 = \dfrac{2x^2 - 16}{4}$ $\quad y = \sqrt{\dfrac{2x^2 - 16}{4}}$

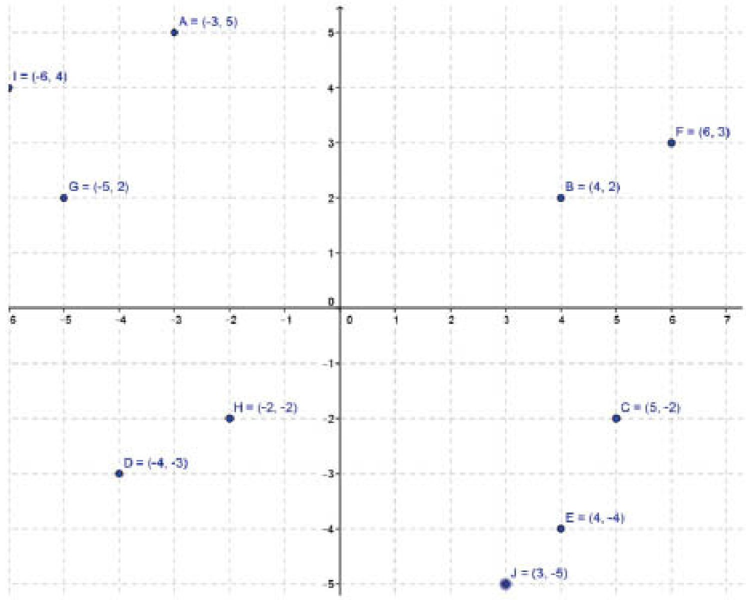
9. Como $x - 2$ está dentro de una raíz cuadrada y ésta no puede tener valores negativos, se hace $x - 2 \geq 0$ y se despeja la x. quedando $x \geq 2$ Por lo tanto, x es mayor o igual a 2, es decir, 2, 3, 4, 5, …

10. Como $16 - 4y^2$ está dentro de una raíz cuadrada y ésta no puede tener valores negativos, se hace $16 - 4y^2 \geq 0$ y se despeja la y. obteniendo $-4y^2 \geq 0 - 16$ y al pasar el -4 hacia el otro lado dividiendo, se cambia el sentido de la desigualdad por ser una de sus propiedades, quedando $y^2 \leq \dfrac{-16}{-4} y^2 \leq 4$ $\quad y \leq \pm\sqrt{4}$ $\quad y \leq \pm 2$

Por lo tanto, y está entre -2 y +2, es decir, -2, -1, 0, 1, 2

Actividad 1

1.



2. Parejas ordenadas
   (*l*,1), (*l*,2), (*l*,3), (*l*,4), (*m*,1), (*m*,2), (*m*,3), (*m*,4), (*m*,1), (*m*,2), (*m*,3), (*m*,4), (*j*,1), (*j*,2), (*j*,3), (*j*,4), (*v*,1), (*v*,2), (*v*,3), (*v*,4), (*s*,1), (*s*,2), (*s*,3), (*s*,4), (*d*,1), (*d*,2), (*d*,3), (*d*,4).

3. Parejas ordenadas
   (*r*,8), (*r*,9), (*r*,10), (*r*,11), (*g*,8), (*g*,9), (*g*,10), (*g*,11), (*b*,8), (*b*,9), (*b*,10), (*b*,11).

4. Conjunto A {-1, -2, -3, -5} Conjunto B {1, 3, 5, 7, 9}

5. Conjunto A {3, 4, 5, 6, 7} Conjunto B {-11, -9, -7, -5, -3, -1}

6.
   a) La capital de Zacatecas (102°,22°)
   b) La capital de Jalisco (103°,20°)
   c) La capital de Guanajuato (101°,21°)
   d) La capital de Nuevo León (101°,25°)
   e) La capital del Estado de México (101°,25°)
   f) El Distrito Federal (99°,19°)
   g) ¿Qué estado se encuentra en las coordenadas (111°,25°)? Baja California Sur
   h) ¿Qué estado se encuentra en las coordenadas (90°, 21°)? Yucatán

7.

a) ¿En qué coordenadas se encuentra el caballo blanco de la casilla negra? (G,1)
b) ¿En qué coordenadas se encuentra la reina blanca? (E,1)
c) ¿En qué coordenadas se encuentra el rey negro? (D,8)
d) ¿En qué coordenadas se encuentra el alfil negro que está en la casilla blanca? (F,8)
e) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (C,1)? Alfil blanco
f) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (H,8)? Torre negra
g) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (E,8)? Reina negra
h) ¿Qué figura se encuentra en la casilla con coordenadas (D,2)? Peón blanco

Actividad 2

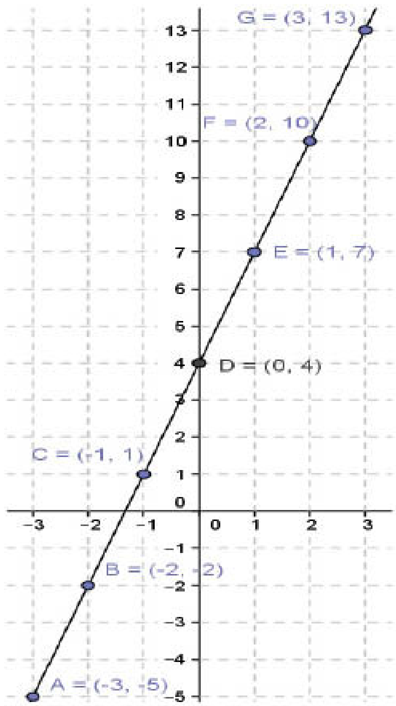
1.

a) El eje horizontal o eje de las *x* recibe el nombre de *abscisas*.
b) El eje vertical o eje de las *y* recibe el nombre de *ordenadas*.
c) Al punto cuyas coordenadas son (0,0) se le llama *origen*.
d) El primer valor en un par ordenado corresponde a la *x* y el segundo a la *y*
e) El plano cartesiano tiene 4 cuadrantes que se leen de izquierda a derecha en sentido *contrario* al de las manecillas del reloj.
f) Las rectas que forman el plano cartesiano *son perpendiculares porque forman un ángulo de 90° **entre cada uno de sus cuadrantes.***

2. a)

Valor de *x*	Ecuación $y = 3x + 4$	Valor de *y*	Puntos
-3	$y = 3(-3) + 4$	-5	A(-3,-5)
-2	$y = 3(-2) + 4$	-2	B(-2,-2)
-1	$y = 3(-1) + 4$	1	C(-1,1)
0	$y = 3(0) + 4$	4	D(0,4)
1	$y = 3(1) + 4$	7	E(1,7)
2	$y = 3(2) + 4$	10	F(2,10)
3	$y = 3(3) + 4$	13	G(3,13)

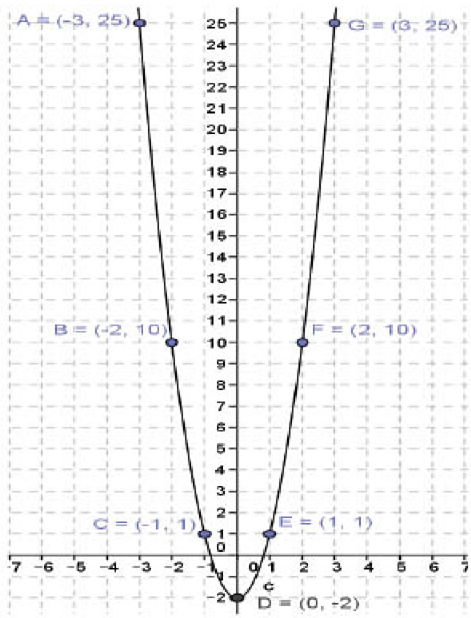
El lugar geométrico es una recta



b)

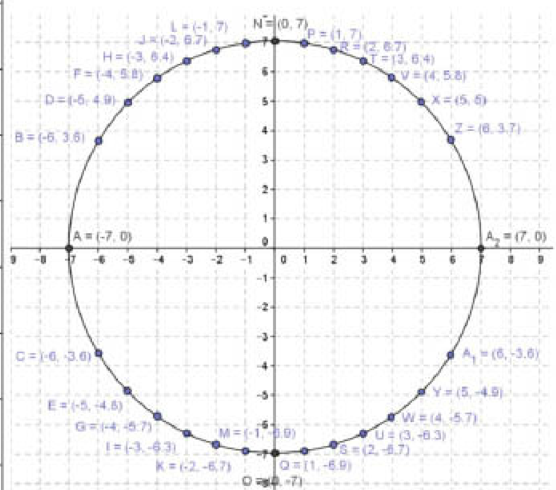
Valor de x	Ecuación $y = 3x^2 - 2$	Valor de y	Puntos
-3	$3(-3)^2 - 2$	25	A(-3,25)
-2	$3(-2)^2 - 2$	10	B(-2,10)
-1	$3(-1)^2 - 2$	1	C(-1,1)
0	$3(0)^2 - 2$	-2	D(0,-2)
1	$3(1)^2 - 2$	1	E(1,1)
2	$3(2)^2 - 2$	10	F(2,10)
3	$3(3)^2 - 2$	25	G(3,25)

El lugar geométrico es una parábola



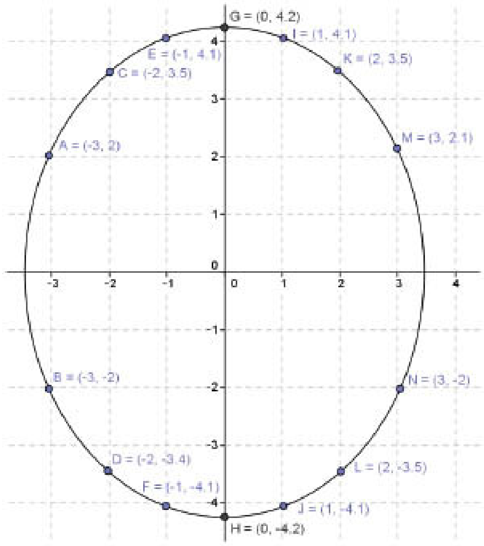
c) Despejando y: $y^2 = 49 - x^2$ $y = \pm\sqrt{49 - x^2}$

Valor de x	Ecuación $x^2 + y^2 = 49$	Valor de y	Puntos
-7	$\pm\sqrt{49-(-7)^2}$	0	A(-7,0)
-6	$\pm\sqrt{49-(-6)^2}$	$+\sqrt{13}=3.6$ $-\sqrt{13}=-3.6$	B(-6,3.6) C(-6,-3.6)
-5	$\pm\sqrt{49-(-5)^2}$	$+\sqrt{24}=4.9$ $-\sqrt{24}=-4.9$	D(-5,4.9) E(-5,-4.9)
-4	$\pm\sqrt{49-(-4)^2}$	$+\sqrt{33}=5.7$ $-\sqrt{33}=-5.7$	F(-4,5.7) G(-4,-5.7)
-3	$\pm\sqrt{49-(-3)^2}$	$+\sqrt{40}=6.3$ $-\sqrt{40}=-6.3$	H(-3,6.3) I(-3,-6.3)
-2	$\pm\sqrt{49-(-2)^2}$	$+\sqrt{45}=6.7$ $-\sqrt{45}=-6.7$	J(-2,6.7) K(-2,-6.7)
-1	$\pm\sqrt{49-(-1)^2}$	$+\sqrt{1}=6.9$ $-\sqrt{1}=-6.9$	L(-1,6.9) M(-1,-6.9)
0	$\pm\sqrt{49-(0)^2}$	$+\sqrt{49}=7$ $-\sqrt{49}=-7$	N(0,7) O(0,-7)
1	$\pm\sqrt{49-(1)^2}$	$+\sqrt{1}=6.9$ $-\sqrt{1}=-6.9$	P(1,6.9) Q(1,-6.9)
2	$\pm\sqrt{49-(2)^2}$	$+\sqrt{45}=6.7$ $-\sqrt{45}=-6.7$	R(2,6.7) S(2,-6.7)
3	$\pm\sqrt{49-(3)^2}$	$+\sqrt{40}=6.3$ $-\sqrt{40}=-6.3$	T(3,6.3) U(3,-6.3)
4	$\pm\sqrt{49-(4)^2}$	$+\sqrt{33}=5.7$ $-\sqrt{33}=-5.7$	V(4,5.7) W(4,-5.7)
5	$\pm\sqrt{49-(5)^2}$	$+\sqrt{24}=4.9$ $-\sqrt{24}=-4.9$	X(5,4.9) Y(5,-4.9)
6	$\pm\sqrt{49-(6)^2}$	$+\sqrt{13}=3.6$ $-\sqrt{13}=3.6$	Z(6,3.6) A_1(6,-3.6)
7	$\pm\sqrt{49-(7)^2}$	0	A_2(7,0)



El lugar geométrico es una circunferencia *d) Despejando y:* $y^2 = \frac{36-3x^2}{2}$ $\quad y = \pm\sqrt{\frac{36-3x^2}{2}}$

Valor de x	Ecuación $3x^2 + 2y^2 = 36$	Valor de *y*	Puntos
-3	$\pm\sqrt{\frac{36-3(-3)^2}{2}}$	$+\sqrt{4.5}=2.1$ $-\sqrt{4.5}=-2.1$	A(-3,2.1) B(-3,-2.1)
-2	$\pm\sqrt{\frac{36-3(-2)^2}{2}}$	$+\sqrt{12}=3.5$ $-\sqrt{12}=-3.5$	C(-2,3.5) D(-2,-3.5)
-1	$\pm\sqrt{\frac{36-3(-1)^2}{2}}$	$+\sqrt{16.5}=4.1$ $-\sqrt{16.5}=-4.1$	E(-1,4.1) F(-1,-4.1)
0	$\pm\sqrt{\frac{36-3(0)^2}{2}}$	$+\sqrt{18}=4.2$ $-\sqrt{18}=-4.2$	G(0,4.2) H(0,-4.2)
1	$\pm\sqrt{\frac{36-3(-1)^2}{2}}$	$+\sqrt{16.5}=4.1$ $-\sqrt{16.5}=-4.1$	I(1,4.1) J(1,-4.1)
2	$\pm\sqrt{\frac{36-3(-3)^2}{2}}$	$+\sqrt{12}=3.5$ $-\sqrt{12}=-3.5$	K(2,3.5) L(2,-3.5)
3	$\pm\sqrt{\frac{36-3(-3)^2}{2}}$	$+\sqrt{4.5}=2.1$ $-\sqrt{4.5}=-2.1$	M(3,2.1) N(3,-2.1)



El lugar geométrico es una elipse.

3.

(C) $x^2 + y^2 - 16 = 0$	A) Recta
(D) $3x^2 + 5y^2 - 6 = 0$	B) Parábola
(B) $2x^2 - y + 7 = 0$	C) Circunferencia
(A) $y - 4x + 6 = 12$	D) Elipse

Actividad 3

1. Encuentra las intersecciones con los ejes *x* y *y* para las siguientes ecuaciones

a) $6x - 3y - 12 = 0$ Para la intersección con *x* se hace $y = 0$ $6x - 3(0) = 12 \quad x = \frac{12}{6} \quad x = 2$ Para la intersección con *y* se hace x = 0 $6(0) - 3y = 12 \quad y = \frac{12}{-3} \quad y = -4$	b) $4x + 2y - 16 = 0$ Para la intersección con *x* se hace $y = 0$ $4x + 2(0) = 16 \quad x = \frac{16}{4} \quad x = 4$ Para la intersección con *y* se hace x = 0 $4(0) + 2y = 16 \quad y = \frac{16}{2} \quad y = 8$
c) $2x^2 - 9y - 72 = 0$ $2x^2 - 9(0) = 72 \quad x^2 = \frac{72}{2} \quad x = \sqrt{36} \quad x = \pm 6$ Para la intersección con *y* se hace x = 0 $2(0)^2 - 9y = 72 \quad y = \frac{72}{-9} \quad y = -8$	d) $3x^2 + 15y - 75 = 0$ $3x^2 - 15(0) = 75 \quad x^2 = \frac{75}{3} \quad x = \sqrt{25} \quad x = \pm 5$ Para la intersección con *y* se hace $x = 0$ $3(0)^2 - 15y = 75 \quad y = \frac{75}{-15} \quad y = -5$

2.

a) $y^2 = 5x$ Para la simetría de x, se sustituye y por $-y$ $(-y)^2 = 5x$ $y^2 = 5x$ Sí queda igual que la original Sí es simétrica con respecto a x Para la simetría de y, se sustituye x por $-x$ $y^2 = 5(-x)$ $y^2 = -5x$ No queda igual que la original No es simétrica con respecto a y Para la simetría con el origen, se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ $(-y)^2 = 5(-x)$ $y^2 = -5x$ No queda igual que la original No es simétrica con respecto al origen	b) $x^2 + y^2 = 15$ Para la simetría de x, se sustituye y por $-y$ $x^2 + (-y)^2 = 15$ $x^2 + y^2 = 15$ Si queda igual que la original Sí es simétrica con respecto a x Para la simetría de y, se sustituye x por $-x$ $(-x)^2 + y^2 = 15$ $x^2 + y^2 = 15$ Sí queda igual que la original Si es simétrica con respecto a y Para la simetría con el origen, se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ $(-x)^2 + (-y)^2 = 15$ $x^2 + y^2 = 15$ Sí queda igual que la original Sí es simétrica con respecto al origen
c) $2x + 3y = 10$ Para la simetría de x, se sustituye y por $-y$ $2x + 3(-y) = 10$ $2x - 3y = 10$ No queda igual que la original No es simétrica con respecto a x Para la simetría de y, se sustituye x por $-x$ $2(-x) + 3y = 10$ $-2x + 3y = 10$ No queda igual que la original No es simétrica con respecto a y Para la simetría con el origen, se sustituyen x por $-x$ y y por $-y$ $2(-x) + 3(-y) = 10$ $-2x - 3y = 10$ No queda igual que la original No es simétrica con respecto al origen	d) $2x^2 + 4y^2 = 16$ Para la simetría de x, se sustituye y por $-y$ $2x^2 + 4(-y)^2 = 16$ $2x^2 + 4y^2 = 16$ Si queda igual que la original Sí es simétrica con respecto a x Para la simetría de y, se sustituye x por $-x$ $2(-x)^2 + 4y^2 = 16$ $2x^2 + 4y^2 = 16$ Sí queda igual que la original Si es simétrica con respecto a y Para la simetría con el origen, se sustituye x por $-x$ y y por $-y$ $2(-x)^2 + 4(-y)^2 = 16$ $2x^2 + 4y^2 = 16$ Sí queda igual que la original Sí es simétrica con respecto al origen

3. Determina la extensión de las variables en las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 6y$ Para obtener extensión de x se despeja y $y = \frac{x^2}{6}$ Se puede dar cualquier valor a x $x = [-\infty,+\infty]$ Para obtener extensión de y se despeja x $x = \pm\sqrt{6y}$ Como es una raíz cuadrada, los valores de y tienen que ser mayores o iguales que 0, ya que si se dan negativos quedaría la raíz negativa $y = [0,+\infty]$	b) $y^2 = -8x$ Para obtener extensión de x se despeja y $y = \sqrt{-8x}$ Como es una raíz cuadrada, los valores de x tienen que ser menores que 0, ya al multiplicar por -8 el resultado se hace positivo $x = [-\infty,0)$ El paréntesis indica que no se puede tomar el 0, sino los menores a él Para obtener extensión de y se despeja x $x = \frac{y^2}{-8}$ Se puede dar cualquier valor a y $y = [-\infty,+\infty]$

c) $x^2 - y^2 = 16$ Para obtener extensión de x se despeja y $y = \pm\sqrt{x^2 - 16}$ Como es una raíz cuadrada, tiene que dar un resultado positivo, por lo que hacemos $x^2 - 16 > 0$ y se despeja la variable x $x^2 > 16$ $x > \pm\sqrt{16}$ $x > \pm 4$ $x = [-4,+4]$ Para obtener extensión de y se despeja x $x = \pm\sqrt{16 + y^2}$ Como es una raíz cuadrada, tiene que dar un resultado positivo, y como y está al cuadrado, al momento de darle un valor se hará positivo, pudiendo tomar cualquier valor. $y = [-\infty,+\infty]$	d) $y^2 - x^2 = 25$ Para obtener extensión de x se despeja y $y = \pm\sqrt{25 + x^2}$ Como es una raíz cuadrada, tiene que dar un resultado positivo, y como x está al cuadrado, al momento de darle un valor se hará positivo, pudiendo tomar cualquier valor. $x = [-\infty,+\infty]$ Para obtener extensión de y se despeja x $x = \pm\sqrt{y^2 - 25}$ Como es una raíz cuadrada, tiene que dar un resultado positivo, por lo que hacemos $y^2 - 25 > 0$ y se despeja la variable y $y^2 > 25$ $y > \pm\sqrt{25}$ $x > \pm 5$ $y = [-5,+5]$

Bloque II

Evaluación diagnóstica.

1. Resolviendo por el teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2+b^2}$ $c = \sqrt{(8)^2+(6)^2}$ $c = \sqrt{64+36}$ $c = \sqrt{100}$ $c = 100$

2. $a = \sqrt{(-2-0)^2+(4-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2}$ $a = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ $a = 2.83$

   $b = \sqrt{(1-0)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{(1)^2+(-5)^2}$ $b = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ $b = 5.1$

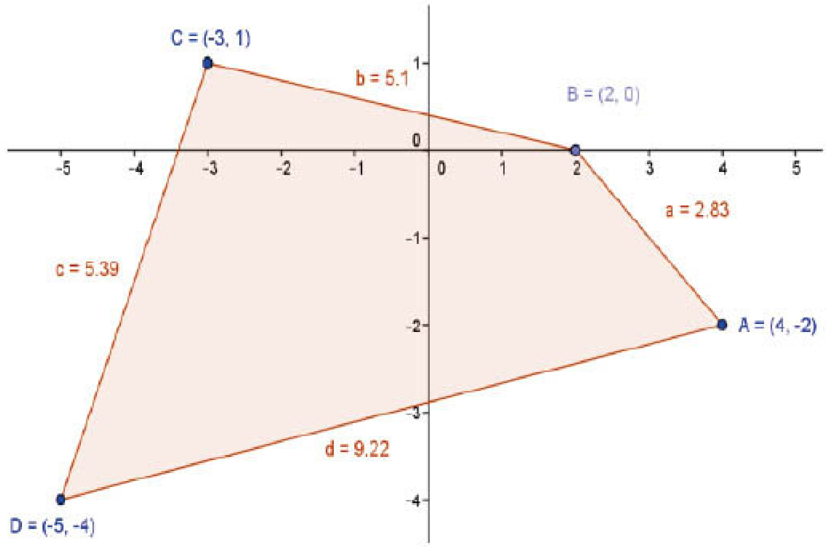
   $c = \sqrt{(-4-1)^2+(-5-(-3))^2}$ $c = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

   c = 5.39

   $d = \sqrt{(-4-(-2))^2+(-5-4)^2}$

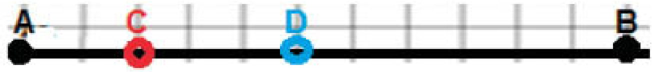
   $d = \sqrt{(-2)^2+(-9)^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$ d = 9.22

   P = a + b + c + d = 2.83 + 5.1 + 5.39 + 9.22 *P* = 22.54



3. La razón entre $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ es -4/16, o lo que es lo mismo, -1/4
   La razón entre $\overline{CD}$ y $\overline{DB}$ es -4/12, o lo que es lo mismo, -1/3

4. $PM_{\overline{AB}} = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $PM_{\overline{AB}} = 2$

5. 

$\overline{AC} = 2$ $\overline{CD} = 3$ $\overline{DB} = 6$

$\overline{DB}$ es el triple de $\overline{AC}$ $2 \times 3 = 6$ $\overline{DB}$ es el doble de $\overline{CD}$ $3 \times 2 = 6$

Actividad 1

1. $\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ $\overline{AB} = 5$

2. $\overline{AB} = \sqrt{(-3-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ $\overline{AB} = 5$

3. $\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2 + (-7-(-3))^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ $\overline{AB} = 7.2$

4. $\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$ $\overline{AB} = 5.38$

5. $\overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ $\overline{AB} = 3.16$
   $\overline{BC} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ $\overline{BC} = 4.12$
   $\overline{CD} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9}$ $\overline{CD} = 3.0$
   $\overline{DE} = \sqrt{(2-4)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\overline{DE} = 3.61$
   $\overline{EA} = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ $\overline{EA} = 3.61$
   $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 3.16 + 4.12 + 3.0 + 3.61 + 3.61$ $P = 17.5$

6. $\overline{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16}$ $\overline{AB} = 4.00$
   $\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ $\overline{BC} = 4.24$
   $\overline{CD} = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-10)^2} = \sqrt{0+100} = \sqrt{100}$ $\overline{CD} = 10.00$
   $\overline{DA} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ $\overline{DA} = 4.24$
   $P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = 4.00 + 4.24 + 10.0 + 4.24$ $P = 22.48$

7. $\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ $\overline{AB} = 5.00$
   $\overline{BC} = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-8)^2} = \sqrt{0+64} = \sqrt{64}$ $\overline{BC} = 8.00$
   $\overline{CA} = \sqrt{(1-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ $\overline{CA} = 5.00$

   Como $\overline{AB} = \overline{CA}$, es decir, 5 = 5, el triángulo tiene 2 lados iguales, por lo que es un triángulo isósceles.

8. $\bar{d} = \overline{BD} = \sqrt{(1-1)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(0)^2 + (4)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16}$ $\bar{d} = 4.00$

$\bar{D} = \overline{AC} = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (0)^2} = \sqrt{36+0} = \sqrt{36}$ $\bar{D} = 6.00$

$A = \frac{dD}{2} = \frac{(4)(6)}{2} = \frac{24}{2}$ $A = 12$

9. $\overline{AD} = \sqrt{(2-4)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\overline{AD} = 3.61$

$\overline{DB} = \sqrt{(1-2)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$ $\overline{DB} = 6.08$

$\overline{BA} = \sqrt{(1-4)^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ $\overline{BA} = 4.24$

$s_1 = \frac{\overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BA}}{2} = \frac{3.61 + 6.08 + 4.24}{2} = \frac{13.93}{2}$ $s_1 = 6.97$

$A_1 = \sqrt{s_1(s_1 - \overline{AD})(s_1 - \overline{DB})(s_1 - \overline{BA})} = \sqrt{6.97(6.97-3.61)(6.97-6.08)(6.97-4.24)}$

$A_1 = 7.54$

$\overline{BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-(-4))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ $\overline{BC} = 2.83$

$\overline{CD} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$ $\overline{CD} = 5.00$

$s_2 = \frac{\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DB}}{2} = \frac{2.83 + 5.0 + 6.08}{2} = \frac{13.91}{2}$ $s_2 = 6.96$

$A_2 = \sqrt{s_2(s_2 - \overline{BC})(s_2 - \overline{CD})(s_2 - \overline{DB})} = \sqrt{6.96(6.96-2.83)(6.96-5)(6.96-6.08)}$

$A_2 = 7.04$

Se suman ahora las áreas A_1 y A_2 $A_t = A_1 + A_2 = 7.54\text{ u}^2 + 7.04\text{ u}^2$ $A_t = 14.58\text{ u}^2$

Actividad 2

1. $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{2}{4}$ $r = \frac{2}{4}$

2. $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{-3}{12}$ $r = \frac{-1}{4}$

3. $r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{-2}{7}$ $r = \frac{-2}{7}$

4. $r = \frac{IR}{RF} = \frac{30}{70}$ $r = \frac{3}{7}$

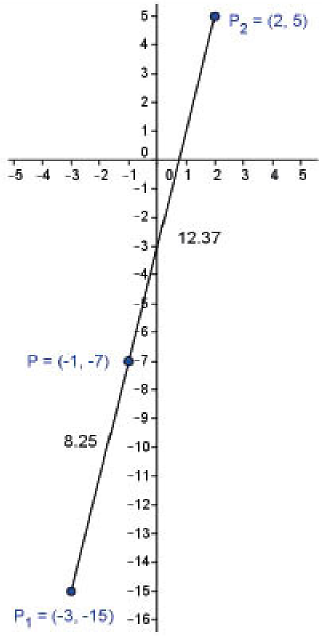
5. $\overline{P_1P} = \sqrt{(-15-(-7))^2+(-3-(-1))^2} = \sqrt{(-8)^2+(-2)^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ $\quad\quad$ $\overline{P_1P} = 8.25$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(-7-5))^2+(-1-2)^2} = \sqrt{(-12)^2+(-3)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{144+9} = \sqrt{153}$ $\quad\quad$ $\overline{PP_2} = 8.25$

$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{8.25}{12.37}$ $\quad\quad$ $r = \frac{2}{3}$



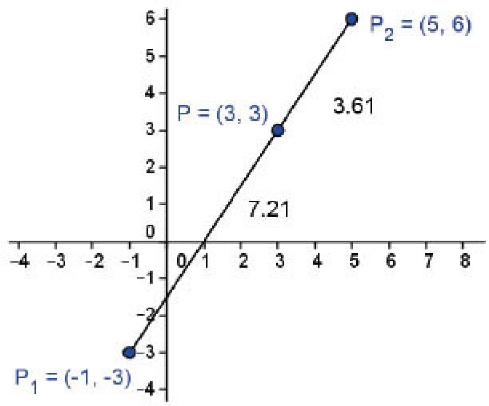
6. $\overline{P_1P} = \sqrt{(-3-3)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-4)^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ $\quad\quad$ $\overline{P_1P} = 7.21$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(3-6)^2+(3-5)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ $\quad\quad$ $\overline{PP_2} = 3.61$

$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{7.21}{3.61}$ $\quad\quad$ $r = 2$



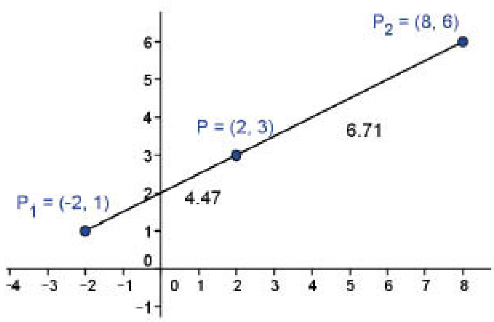
7. $\overline{P_1P} = \sqrt{(1-3)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ $\quad\quad$ $\overline{P_1P} = 4.47$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(3-6)^2+(2-8)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-6)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$ $\quad\quad$ $\overline{PP_2} = 6.71$

$r = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{4.47}{6.71}$ $\quad\quad$ $r = \frac{2}{3}$



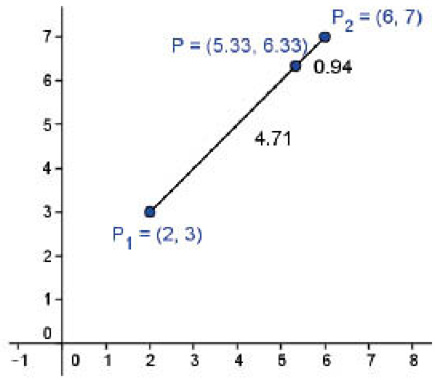
8. $\overline{P_1P} = \sqrt{(3-6.33)^2 + (2-5.33)^2} = \sqrt{(-3.33)^2 + (-3.33)^2}$

$\overline{P_1P} = \sqrt{11.11 + 11.11} = \sqrt{22.22}$ $\quad \overline{P_1P} = 4.71$

$\overline{PP_2} = \sqrt{(6.33-7)^2 + (5.33-6)^2} = \sqrt{(-0.67)^2 + (-0.67)^2}$

$\overline{PP_2} = \sqrt{0.44 + 0.44} = \sqrt{88}$ $\quad \overline{PP_2} = 0.94$

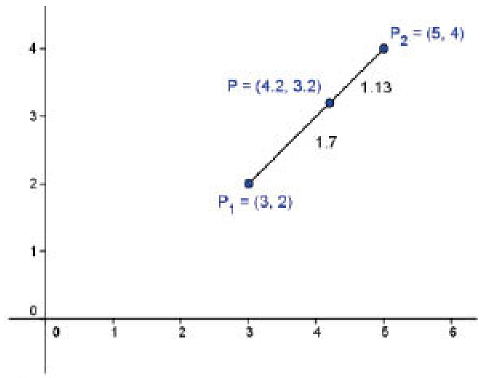
$r = \dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{4.71}{0.94}$ $\qquad r = 5$



9. $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r} = \dfrac{3 + \left(\frac{3}{2}\right)(5)}{1 + \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{21}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{42}{10}$ $\qquad x = \dfrac{21}{5}$

$y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r} = \dfrac{2 + \left(\frac{3}{2}\right)(4)}{1 + \frac{3}{2}} = \dfrac{8}{\frac{5}{2}} = \dfrac{16}{5}$ $\qquad y = \dfrac{16}{5}$

Las coordenadas son $P\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$

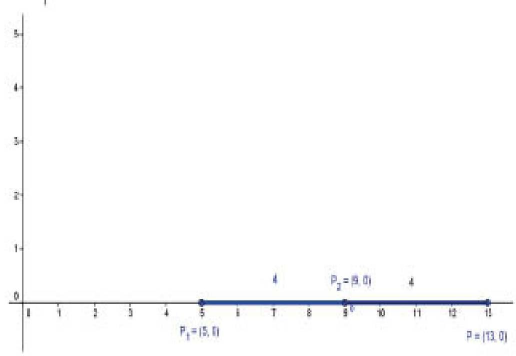


10. $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r} = \dfrac{5+(-2)(9)}{1+(-2)} = \dfrac{5-18}{1-2} = \dfrac{-13}{-1}$

$x = 13$

$y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r} = \dfrac{0+(-2)(0)}{1+(-2)} = \dfrac{0}{-1} = 0$ $\qquad y = 0$

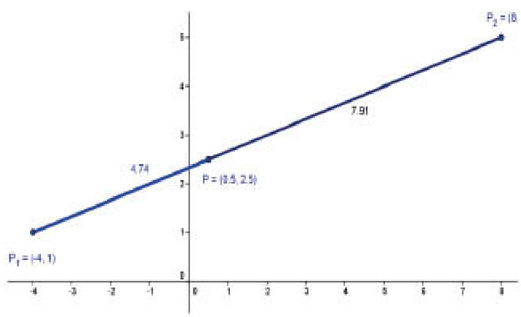
Las coordenadas son $P(13,0)$



11. $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1+r} = \dfrac{-4 + \left(\frac{3}{5}\right)(8)}{1 + \frac{3}{5}} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}} = \dfrac{20}{40}$ $\qquad x = \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1+r} = \dfrac{1+\left(\frac{3}{5}\right)(5)}{1+\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{\frac{8}{5}} = \dfrac{20}{8}$ $\qquad y = \dfrac{5}{2}$

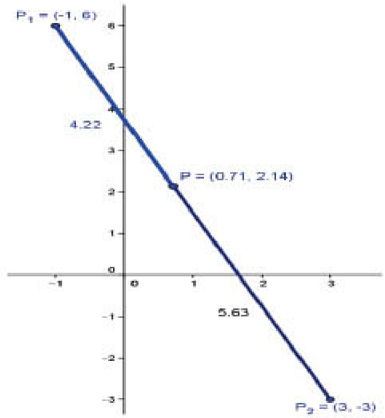
Las coordenadas son $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$



12. $x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{-1+\left(\frac{3}{4}\right)(3)}{1+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{20}{28} \quad x = \frac{5}{7}$

$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{6+\left(\frac{3}{4}\right)(-3)}{1+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{60}{28} \quad y = \frac{15}{7}$

Las coordenadas son $P\left(\frac{5}{7}, \frac{15}{7}\right)$



Actividad 3

1. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad y_M = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Las coordenadas del punto medio son $P_M = (-1,-1)$

2. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_M = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Las coordenadas del punto medio son $P_M = (1,0)$

3. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_M = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Las coordenadas del punto medio son $P_M = (1,3)$

4. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y_M = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Las coordenadas del punto medio son $P_M = (1,2)$

5. $2x_M = x_1 + x_2 \qquad 2x_M - x_2 = x_1 \qquad 2(-1) - 2 = x_1 \qquad -2 - 2 = x_1 \qquad x_1 = -4$

$2y_M = y_1 + y_2 \qquad 2y_M - y_2 = y_1 \qquad 2(2) - 3 = y_1 \qquad 4 - 3 = y_1 \qquad y_1 = 1$

Las coordenadas del punto son $P_1(-4,1)$

6. $2x_M = x_1 + x_2$ $\quad 2x_M - x_2 = x_1$ $\quad 2(2) - 7 = x_1$ $\quad 4 - 7 = x_1$ $\quad x_1 = -3$
   $2y_M = y_1 + y_2$ $\quad 2y_M - y_2 = y_1$ $\quad 2(3) - 1 = y_1$ $\quad 6 - 1 = y_1$ $\quad y_1 = 5$

   Las coordenadas del punto son $P_1(-3,5)$

7. $2x_M = x_1 + x_2$ $\quad 2x_M - x_1 = x_2$ $\quad 2(1) - (-3) = x_1$ $\quad 2 + 3 = x_2$ $\quad x_2 = 5$
   $2y_M = y_1 + y_2$ $\quad 2y_M - y_1 = y_2$ $\quad 2(-1) - (-3) = y_1$ $\quad -2 + 3 = y_2$ $\quad y_1 = 1$

   Las coordenadas del punto son $P_1(5,1)$

8. $2x_M = x_1 + x_2$ $\quad 2x_M - x_1 = x_2$ $\quad 2(5) - 2 = x_1$ $\quad 10 - 2 = x_2$ $\quad x_2 = 8$
   $2y_M = y_1 + y_2$ $\quad 2y_M - y_1 = y_2$ $\quad 2(-4) - (-1) = y_1$ $\quad -8 + 1 = y_2$ $\quad y_1 = -7$

   Las coordenadas del punto son $P_1(8,-7)$

Bloque III

Evaluación diagnóstica.

1. sen $A = \frac{\text{co}}{\text{h}} = \frac{3}{5} = 0.6$ cos $A = \frac{\text{ca}}{\text{h}} = \frac{4}{5} = 0.8$ tan $A = \frac{\text{co}}{\text{ca}} = \frac{3}{4} = 0.75$

2. Encuentra los valores de los ángulos A, B y C del siguiente triángulo:

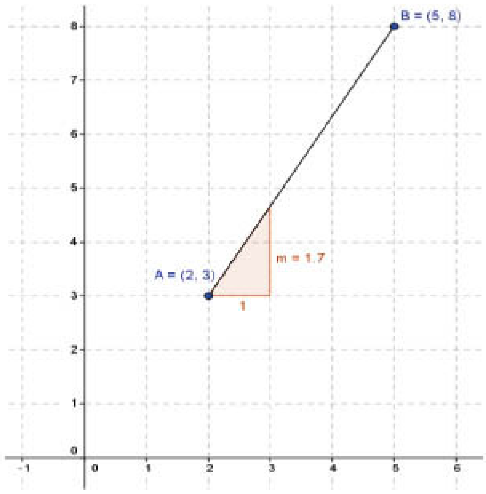
   sen $A = \frac{\text{co}}{\text{h}} = \frac{6}{7.8}$ $A = \text{sen}^{-1}\left(\frac{6}{7.8}\right)$ $A = 50.28°$

   sen $B = \frac{\text{co}}{\text{h}} = \frac{5}{7.8}$ $A = \text{sen}^{-1}\left(\frac{5}{7.8}\right)$ $B = 39.87°$

   $C = 90°$

3. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-3}{5-2} = \frac{5}{3}$

   $m = \frac{5}{3} = 1.7$



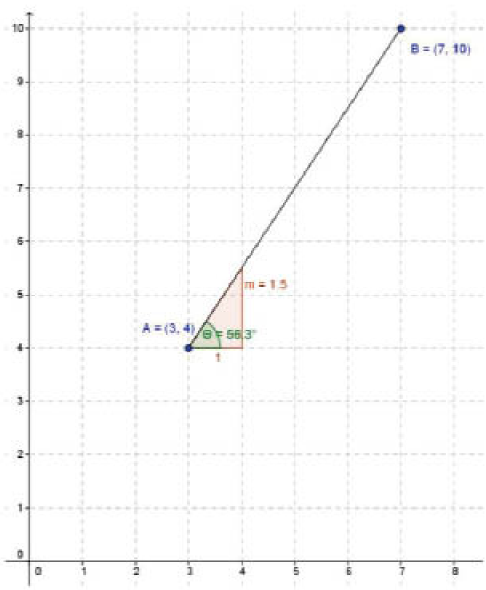
4. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{7-3} = \frac{6}{4}$

   $m = \frac{6}{4} = 1.5$

   $m = \tan\theta$ $\theta = \tan^{-1} m$

   $\theta = \tan^{-1}(1.5)$

   $\theta = 56.31°$



5. $2y = -8x + 14$ $\quad y = \frac{-8x+14}{2}$

6. $4(6x - 3) - 3y + 24 = 0$ $\quad 24x - 12 - 3y + 24 = 0$ $\quad -3y = -24x + 12 - 24$
   $-3y = -24x - 12$ $\quad y = \frac{-24x-12}{-3}$ $\quad y = 8x + 4$

7. Dos rectas que se encuentran a la misma distancia una de otra son *paralelas*.

8. Un ángulo recto mide 90°

9. Dos rectas que al cruzarse forman ángulos rectos entre sí son *perpendiculares*.

10. Dos rectas que al cruzarse NO forman ángulos rectos entre sí son *oblicuas*.

Actividad 1

1. Pendiente es el grado (medida) de inclinación de una recta, es decir, la razón de cambio en *y* con respecto al cambio en *x*.

2. Si la pendiente es positiva, el ángulo de inclinación siempre será agudo (menor a 90º)
   Si la pendiente es negativa, el ángulo de inclinación siempre será obtuso (más de 90º y menos de 180º).
   La pendiente es igual a cero si el ángulo es de 0º (no hay inclinación).
   La pendiente es indefinida o infinita (∞) si el ángulo es recto (igual a 90º).

3. La elevación es el cambio que se da de manera vertical entre dos puntos en una recta. El recorrido o desplazamiento es el cambio que se da de manera horizontal entre los mismos puntos de la recta.

4. La pendiente de una recta es positiva cuando al aumentar la variable independiente aumenta también la variable dependiente, es decir, cuando se mueve de izquierda a derecha de manera ascendente.

5. La pendiente de una recta es negativa cuando al aumentar la variable independiente disminuye la variable dependiente, es decir, cuando se mueve de derecha a izquierda de manera descendente.

6. La pendiente de una recta es cero cuando no tiene inclinación, es decir, la recta es completamente horizontal.

7. La pendiente de una recta es indefinida cuando la recta es completamente vertical.

8.

   a) Pendiente Negativa Ángulo Obtuso

   b) Pendiente Cero Ángulo 180°

   c) Pendiente Positiva Ángulo Agudo

   d) Pendiente Indefinida Ángulo recto (90°)

   e) Pendiente Negativa Ángulo Obtuso

   f) Pendiente Positiva Ángulo Agudo

9.

   a) $m = \frac{-2-2}{3-(-2)} = \frac{-4}{5}$ $m = -0.8$ $\theta = \tan^{-1}(-0.8)$ $\theta = -38.7°$ $\theta = 180 - 38.65° = 141.3°$

   b) $m = \frac{-2-2}{-2-3} = \frac{-4}{-5}$ $m = 0.8$ $\theta = \tan^{-1}(0.8)$ $\theta = 38.7°$

   c) $m = \frac{-1-4}{-4-2} = \frac{-5}{-6}$ $m = 0.83$ $\theta = \tan^{-1}(0.83)$ $\theta = 39.8°$

   d) $m = \frac{-1-4}{2-(-3)} = \frac{-5}{5}$ $m = -1$ $\theta = \tan^{-1}(1)$ $\theta = -45°$ $\theta = 180 - 45° = 135°$

   e) $m = \frac{1-4}{7-2} = \frac{-3}{5}$ $m = -0.6$ $\theta = \tan^{-1}(-0.6)$ $\theta = -31°$ $\theta = 180 - 31° = 149°$

   f) $m = \frac{-2-2}{-2-2} = \frac{-4}{-4}$ $m = 1$ $\theta = \tan^{-1}(1)$ $\theta = 45°$

Actividad 2

1. Para que dos *rectas sean paralelas* sus *pendientes* tienen que ser *iguales* ($m_1 = m_2$)
   Para que dos rectas sean perpendiculares (ninguna de ellas vertical) el producto o multiplicación de sus *pendientes debe ser igual a – 1 (m_A) (m_B) = –1*, es decir, las *pendientes deben ser recíprocas y de signo contrario,* además de formar un ángulo de inclinación de 90°.

   Sin no *son paralelas ni perpendiculares*, entonces son *oblicuas*.

2. $m_1 = \frac{5-1}{-2-4} = \frac{4}{-6}$ $m_1 = -0.7$

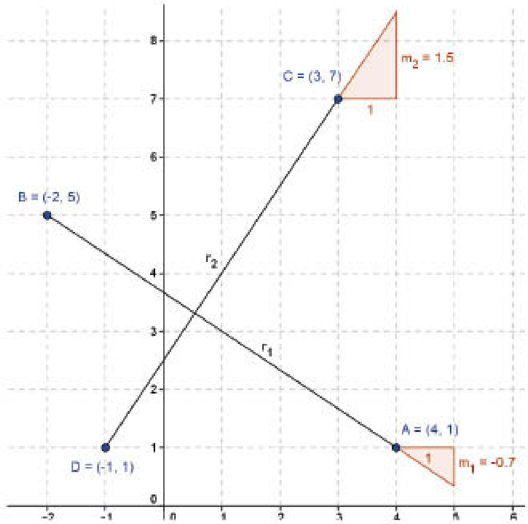
$m_2 = \frac{1-7}{-1-3} = \frac{-6}{-4}$ $m_2 = 1.5$

$m_1 \neq m_2$

$(-0.7)(1.5) = -1$

Como $(m_1)\ (m_2) = -1$

Las rectas son perpendiculares



3. $m_1 = \frac{3-6}{1-2} = \frac{-3}{-1}$ $m_1 = 3$

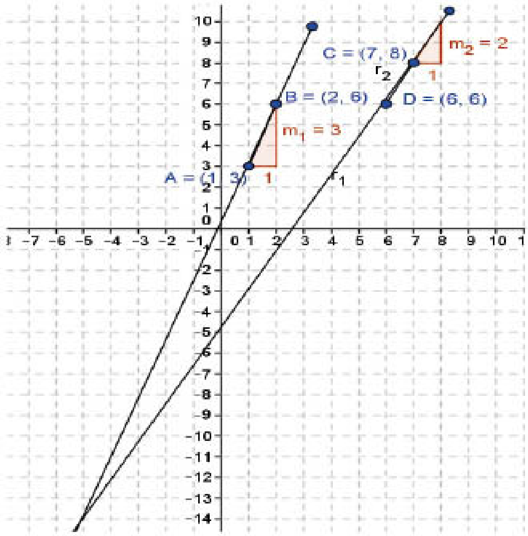
$m_2 = \frac{6-8}{6-7} = \frac{-2}{-1}$ $m_2 = 2$

$m_1 \neq m_2$

$(3)(2) = 6$

Como $(m_1)\ (m_2) \neq -1$

Las rectas son oblicuas



4. $m_1 = \frac{1-3}{-2-4} = \frac{-2}{-6}$ $m_1 = 0.3$

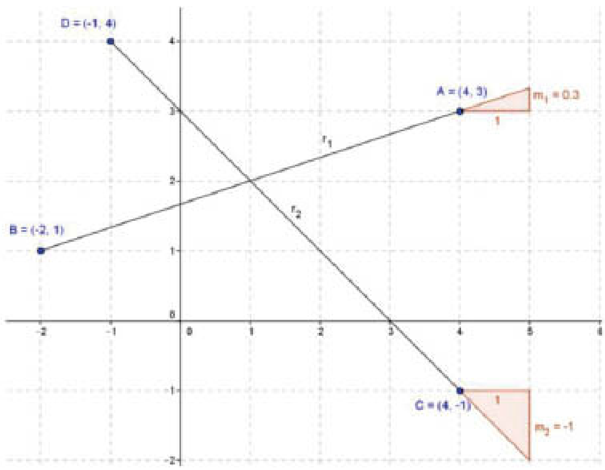
$m_2 = \frac{-1-4}{4-(-1)} = \frac{-5}{5}$ $m_2 = -1$

$m_1 \neq m_2$

$(0.3)(-1) = -0.3$

Como $(m_1)\ (m_2) \neq -1$

Las rectas son oblicuas



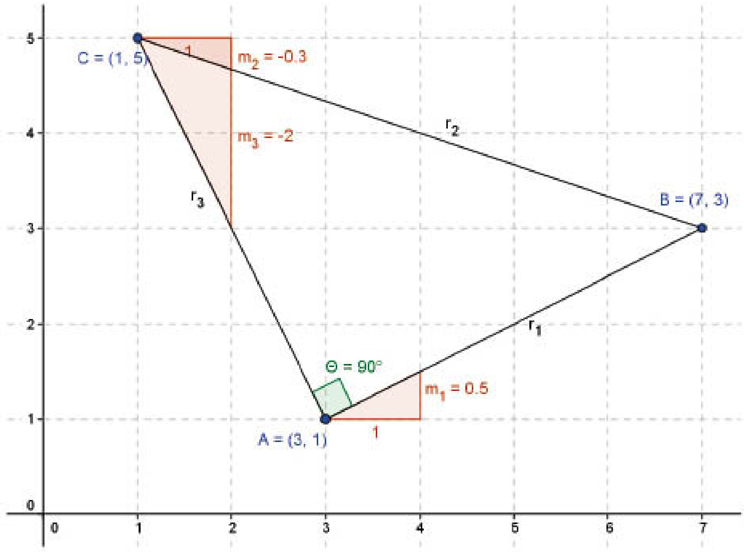
5. $m_1 = \frac{1-3}{3-7} = \frac{-2}{-4}$ $m_1 = 0.5$

$m_2 = \frac{3-5}{7-1} = \frac{-2}{6}$ $m_2 = -0.3$

$m_3 = \frac{5-1}{1-3} = \frac{4}{-2}$ $m_3 = -2$

$(m_1)(m_3) = -1$

$(0.5)(-2) = -1$



m_1 y m_2 son perpendiculares, por lo que se forma un ángulo de 90° entre r_1 y r_3, condición para que sea un triángulo rectángulo.

Actividad 3

1. Pasos para la solución de aplicaciones de ecuaciones lineales como modelos matemáticos.

Paso 1. Convertir nuestros datos a un modelo matemático.

Paso 2. Se calcula la pendiente sustituyendo los datos que ofrece el problema en la fórmula correspondiente.

Paso 3. Una vez obtenida, se sustituye la pendiente y uno de los puntos en la ecuación de la forma punto-pendiente.

Paso 4. Después se transforma esta ecuación a la forma pendiente-ordenada al origen, para poder realizar los cálculos solicitados en cada situación en particular.

Paso 5. Trazar la gráfica para darnos una idea más exacta de los que estamos hablando.

2. Aplicaciones de ecuaciones lineales

Aplicación	De qué manera se da la relación entre las variables
En salud	A mayor consumo de comida chatarra, mayor sobrepeso.
En la escuela	A mayor número de horas dedicadas al estudio, mayor será la calificación obtenida.
En agricultura	Cuanto mayor calidad tengan los granos sembrados, mejor calidad será el producto cosechado.
En economía	A mayor oferta de productos, menor será el precio ofertado.
En un viaje en automóvil	A mayor velocidad viaje el auto, menor será el tiempo de recorrido.
En productos	A mayor tiempo transcurrido de la compra de un producto, menor será su precio de venta.

3. a) La función que expresa el costo de producir n chamarras.

60 chamarras (x_1) – \$ 7800 (y_1)

90 chamarras (x_2)- \$ 9300 (y_2)

$m = \frac{9300-7800}{90-60} = \frac{1500}{30}$ $m = 50$ Por cada chamarra se aumentan \$ 50

$y - 7800 = 50(x - 60)$ $y - 7800 = 50x - 3000$ $y = 50x - 3000 + 7800$

$y = 50x + 4800$

b) El costo de producir 400 chamarras

$y = 50(400) + 4800$ $y = 20{,}000 + 4800$ $y = \$\ 24{,}800$

c) El costo de producir 1000 chamarras.

$y = 50(1000) + 4800$ $y = 50{,}000 + 4800$ $y = \$\ 54{,}800$

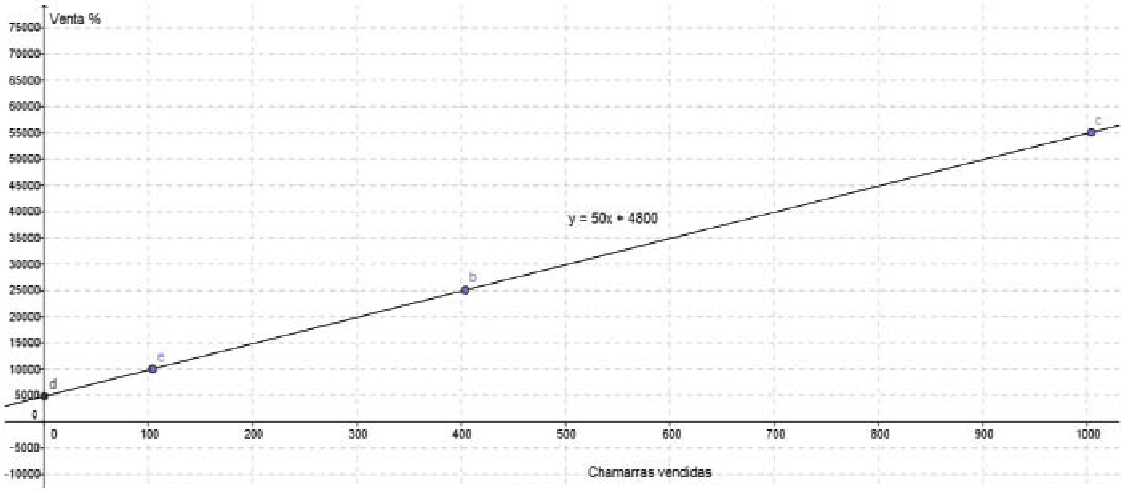
d) La cantidad de chamarras que se pueden producir con \$ 5000.

$5000 = 50x + 4800$ $5000 - 4800 = 50x$ $x = \frac{200}{50} x = 4$ chamarras

e) La cantidad de chamarras que se pueden producir con \$ 10,000

$10{,}000 = 50x + 4800$ $10{,}000 - 4800 = 50x$ $x = \frac{5200}{50}$ $x = 104$ chamarras

f) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores.



4. a) La función que expresa el precio de venta del tractor en función del tiempo.

3 años (x_1) – \$ 80,000 (y_1)

7 años (x_2) – \$ 60,000 (y_2)

$m = \frac{60,000 - 80,000}{7-3} = \frac{-20,000}{4}$ m = -5,000 El tractor **pierde \$ 5000 cada año**

y –80,000 =-5,000(x–3) y–80,000 = -5000x+15,000 y = -5000x+15000+80,000

y = -5,000x + 95,000

b) El precio de venta del tractor cuando estaba nuevo

y = -5000(0) + 95,000 y = 0 + 95,000 y = \$ 95,000

c) El precio de venta del tractor **a los 5 años de uso**

y = -5000(5) + 95,000 y = -25,000 + 95,000 y = \$ 70,000

d) El precio de venta del tractor **a los 10 años de uso**

y = -5000(10) + 95,000 y = -50,000 + 95,000 y = \$ 45,000

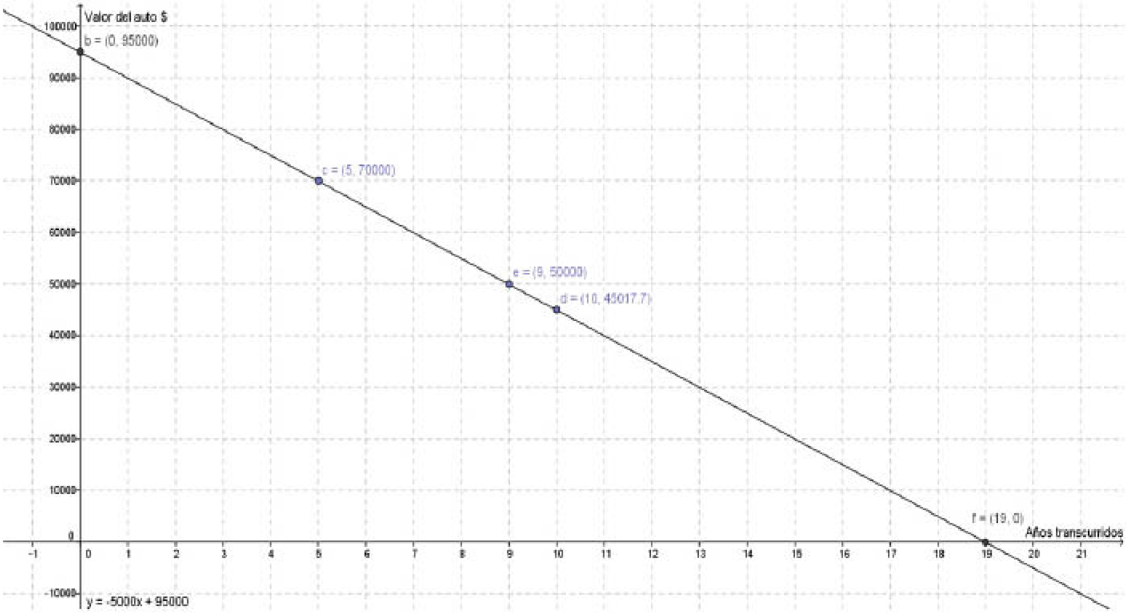
e) ¿En cuánto tiempo se podrá vender el tractor en \$ 50,000?

50,000 = -5000x+95,000 50,000–95,000 =-5000x $x = \frac{-45,000}{-5000}$ x = **9 años**

f) ¿En cuánto tiempo el tractor se deprecia por completo?

0 = -5000x+95,000 0–95,000 =-5000x $x = \frac{-95,000}{-5000}$ x = **19 años**

g) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores



5. a) La función que expresa la altura de la planta en función del tiempo.

   3 días (x_1) – 9.5 cm (y_1)

   10 días (x_2) – 20 cm (y_2)

   $m = \frac{\mathbf{20 - 9.5}}{\mathbf{10-3}} = \frac{\mathbf{-10.5}}{\mathbf{7}}$

   m = 1.5 cm La planta crecerá diariamente 1.5 cm

   $y - 9.5 = 1.5(x - 3)$ $y - 9.5 = 1.5x - 4.5$ $y = 1.5x - 4.5 + 9.5$

   $y = 1.5x + 5$

b) La altura de la planta recién sembrada

   $y = 1.5(0) + 5$ $y = 0 + 5$ $y = 5$ cm

c) La altura de la planta a la primera semana (7 días) de sembrada

$y = 1.5(7) + 5$ $y = 10.5 + 5$ $y = 15.5$ cm

d) La altura de la planta a la segunda semana (14 días) de sembrada

$y = 1.5(14) + 5$ $y = 21 + 5$ $y = 26$ cm

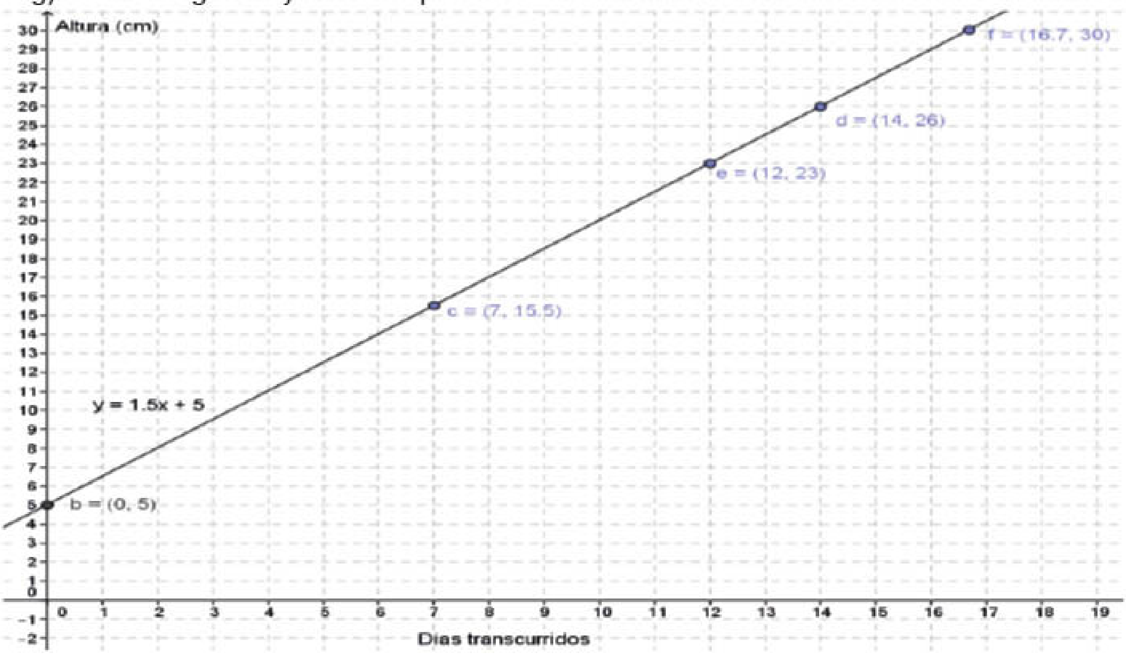
e) ¿En cuánto tiempo la altura de la planta será de 23 cm?

   $23 = 1.5x + 5$ $23 - 5 = 1.5x$ $x = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{1.5}}$ $x = 12$ días

f) ¿En cuánto tiempo la altura de la planta alcanzará los 30 cm?

$30 = 1.5x + 5 \quad 30 - 5 = 1.5x \quad x = \frac{25}{1.5} \quad x = 16.7$ días

g) Realiza la gráfica y ubica los puntos anteriores



Bloque IV

Evaluación diagnóstica.

1. Se calcula la pendiente $m = \frac{0-(-3)}{4-0} = \frac{3}{4}$

   Se sustituye la pendiente y el punto (0,-3) en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$

   $y - (-3) = \frac{3}{4}(x - 0)$ $y + 3 = \frac{3}{4}x$ multiplicando toda la ecuación por 4

   $4y + 12 = 3x$ pasando el 3x al lado izquierdo $-3x + 4y = -12$

2. Se da el valor de $x = 0$ $y = -4(0) - 4$ $y = -4$

   Se da el valor de $y = 0$ $0 = -4x - 4$ Se despeja x: $4 = -4x$ $x = \frac{4}{-4}$ $x = -1$

3. Se calcula la pendiente $m = \frac{-2-2}{5-2} = \frac{-4}{3}$

   Se sustituye la pendiente y el punto (2,2) en la ecuación $y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$

   $y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 2)$ $y - 2 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ multiplicando toda la ecuación por 3

   $3y - 6 = -4x + 8$ pasando todos los términos del lado izquierdo $3y - 6 + 4x - 8 = 0$
   $4x + 3y - 14 = 0$

4. Evalúa los valores de $x = -3$ y $y = 2$ en la ecuación $3x - 2y - 3 = 0$

   $3(-3) - 2y - 3 = 0$ $-9 - 2y - 3 = 0$ $-2y = 9 + 3$ $y = \frac{12}{2}$ $y = 6$

   $3x - 2(2) - 3 = 0$ $3x - 4 - 4 = 0$ $3x = 4 + 4$ $x = \frac{8}{3}$

5. Identifica los valores de la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes ecuaciones:

   a) $4x - 2y + 8 = 0$ Se despeja la y: $-2y = -4x - 8$ $y = \frac{-4x-8}{-2}$ $y = 2x + 4$

      Forma punto pendiente: $y = mx + b$ Pendiente: 2 Ordenada: 4

   b) $12x + 3y - 15 = 0$ Se despeja la y: $3y = -12x + 15$ $y = \frac{-12x+15}{3}$ $y = -4x + 5$

      Forma punto pendiente: $y = mx + b$ Pendiente: -4 Ordenada: 5

6. Abscisa al origen (punto B) = 5 Ordenada al origen (punto A) = -3

7. Se calcula la pendiente $m = \frac{2-3}{4-1} = \frac{-1}{3}$

   Se sustituye la pendiente y el punto (1,3) en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$

   $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$ $y - 3 = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ multiplicando toda la ecuación por 3

   $3y - 9 = -x + 1$

   pasando todos los términos del lado izquierdo $3y - 9 + x - 1 = 0$
   $x + 3y - 10 = 0$

8. Encuentra el valor de los siguientes ángulos:
a) tan 85° = 11.43   b) sen 60° = 0.8660   c) cos 45° = 0.7071   d) $\tan^{-1}$ 85° = 89.33

9. Se obtiene el mcm de los denominadores (5)(2) = 10
Se multiplica cada término por el mcm $10\left(\frac{x}{5}\right) + 10\left(\frac{y}{-2}\right) = 10(1)$ $2x - 5y - 10 = 0$

10. $-4y = -8x - 12$ $y = \frac{-8x - 12}{-4}$ $y = 2x + 3$

Actividad 1

1. La ecuación de la recta en su forma punto-pendiente se expresa como $y - y_1 = m(x - x_1)$

2. La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen se expresa como $y = mx + b$

3. En la ecuación de la recta pendiente-ordenada al origen, la variable dependiente se representa con la letra *y* la pendiente con la letra *m,* la variable independiente con la letra *x*, y la intersección con el eje *y* u ordenada al origen con la letra *b*.

4. Forma punto-pendiente $y - 4 = 2[x - (-2)]$ $y - 4 = 2(x + 2)$
Forma pendiente-ordenada al origen $y - 4 = 2x + 4$ $y = 2x + 4 + 4$ $y = 2x + 8$

5. Forma punto-pendiente $y - (-3) = -3(x - 5)$ $y + 3 = -3(x - 5)$
Forma pendiente-ordenada al origen $y + 3 = -3x + 15$ $y = -3x + 15 - 3$ $y = -3x + 12$

6. Forma punto-pendiente $y - (-6) = \frac{3}{2}[x - (-3)]$ $y + 6 = \frac{3}{2}(x + 3)$
Forma pendiente-ordenada al origen $y + 6 = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} - 6$ $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

7. Al sustituir los valores de $m = -4$ y $b = 5$ en la ecuación $y = mx + b$, resulta $y = -4x + 5$

8. Como las rectas son paralelas, sus pendientes son iguales ($m = 6$), y se sustituye el valor de la ordenada $b = -3$ en la ecuación $y = mx + b$ $y = 6x - 3$

9. Como las rectas son perpendiculares, los valores de sus pendientes son recíprocos y de signos contrarios. Por lo tanto, como la pendiente es igual a -5, su recíproco inverso **es $\frac{1}{5}$.**

Se sustituye este valor y el de $b = 5$ en la ecuación $y = mx+b$,

resultando $y = \frac{1}{5}x + 5$

1. Primero se obtiene el valor de sus pendientes: $m_1 = -4$ y $m_2 = -4$. Como $m_1 = m_2$ se determina que las rectas son *paralelas*.

2. Primero se obtiene el valor de sus pendientes: $m_1 = 6$ y $m_2 = \frac{1}{6}$. Como $m_1 \neq m_2$, ahora se multiplican m_1 y m_2: $(6)\left(\frac{1}{6}\right) = 1$.

   Como el resultado no es -1 ni tampoco son iguales las pendientes, se determina que las rectas son *oblicuas*.

3. Primero se obtiene el valor de sus pendientes: $m_1 = -5$ y $m_2 = \frac{1}{5}$. Como $m_1 \neq m_2$, ahora se multiplican m_1 y m_2: $(-5)\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

   Como el resultado es -1, se determina que las rectas son *perpendiculares*.

Actividad 2

1. Algoritmo para trazar la gráfica de una recta a partir de su pendiente y ordenada al origen.

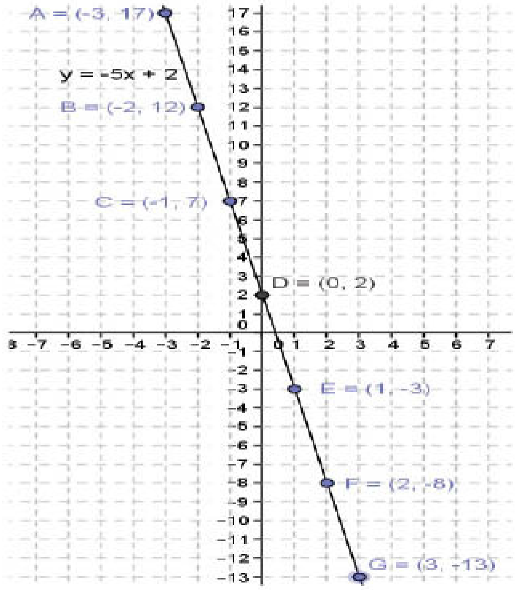
Paso 1. Se identifican la pendiente y la ordenada al origen.

→ **Paso 2.** Se ubica en un plano cartesiano la intersección con el eje y su coordenadas (0,y).

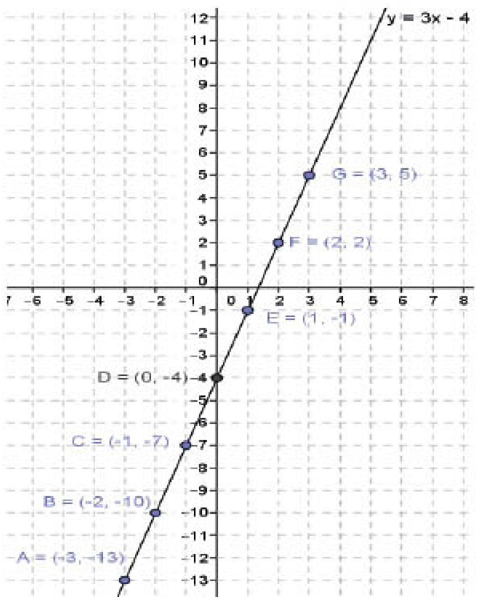
→ **Paso 3.** Nos desplazamos en el eje *y* las unidades que indique, ya sea hacia arriba o hacia abajo, para llegar al punto $(0, y + \Delta y)$. Recuerda que Δy es el cambio en *y*.

→ **Paso 4.** A partir del punto $(0, y + \Delta y)$ nos desplazamos a la derecha el número de unidades que indique el desplazamiento horizontal. Con este desplazamiento llegamos al punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

→ **Paso 5** Se unen los puntos formados por la ordenada al origen $\mathbf{(0, y + \Delta y)}$ y el desplazamiento $\mathbf{(x + \Delta x, y + \Delta y)}$, con lo que se forma la recta que pertenece a la ecuación $\boldsymbol{y = mx + b}$.

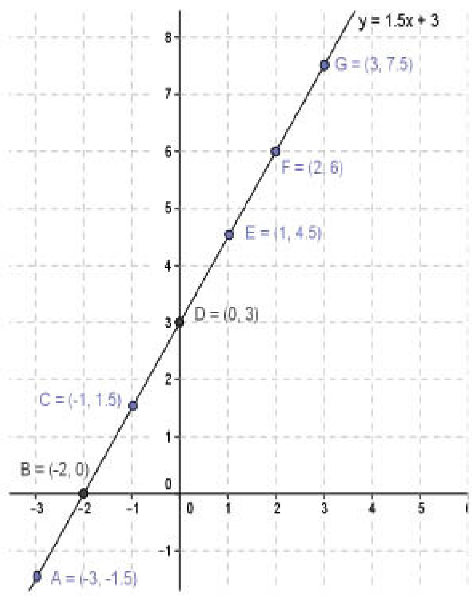


1. Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es
   $y = -5x + 2$



2. Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es
   $y = 3x - 4$

3. Traza la gráfica de la recta cuya ecuación es
   $y = \frac{3}{2}x + 3$



Actividad 3

1. Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de y = 0

   $0 = 5x - 10$ $\quad 10 = 5x$ $\quad \frac{10}{5} = x$ $\quad x = 2$ $\quad a = 2$

   Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de x = 0

   $y = 5(0) - 10$ $\quad y = 0 - 10$ $\quad y = -10$ $\quad b = -10$

   Se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\quad \frac{x}{2} - \frac{y}{10} = 1$

2. Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de y = 0

   $0 = 2x - 12$ $\quad 12 = 2x$ $\quad \frac{12}{2} = x$ $\quad x = 6$ $\quad a = 6$

   Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de $x = 0$

   $y = 2(0) - 12$ $\quad y = 0 - 12$ $\quad y = -12$ $\quad b = -12$

   Se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\quad \frac{x}{6} - \frac{y}{12} = 1$

3. Se pasa a la forma $y = mx + b$ $\quad 4y = -16x - 20$ $\quad y = \frac{-16x - 20}{4}$ $\quad y = -4x - 5$

   Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de y = 0

   $0 = -4x - 5$ $\quad 4x = -5$ $\quad x = \frac{-5}{4}$ $\quad a = \frac{-5}{4}$

   Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de $x = 0$

   $y = -4(0) - 5$ $\quad y = 0 - 5$ $\quad y = -5$ $\quad b = -5$

   Se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\quad \frac{x}{-\frac{5}{4}} - \frac{y}{5} = 1$ $\quad -\frac{4x}{5} - \frac{y}{5} = 1$

4. Se pasa a la forma $y = mx + b$ $\quad 6y = -12x + 18$ $\quad y = \frac{-12x + 18}{6}$ $\quad y = -2x + 3$

   Se determina el valor de la abscisa al origen, dando el valor de y = 0

   $0 = -2x + 3$ $\quad 2x = 3$ $\quad x = \frac{3}{2}$ $\quad a = \frac{3}{2}$

   Se determina el valor de la ordenada al origen, dando el valor de x = 0

   $y = -2(0) + 3$ $\quad y = 0 + 3$ $\quad y = 3$ $\quad b = 3$

   Se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\quad \frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{3} = 1$ $\quad \frac{2x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

5. Se calcula la pendiente $m = \frac{-2-2}{4-(-2)} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

   Se sustituye la pendiente y el punto (-2,2) en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$

   $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - (-2))$ $\quad y - 2 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ $\quad$ se pasa a la forma $y = mx + b$

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 2\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

Se da el valor de y = 0 para encontrar los valores de *x* y *a*

$0 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ $\quad \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}$ $\quad x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$ $\quad x = 1$ $\quad a = 1$

Se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\quad \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1$ $\quad \frac{x}{1} + \frac{3y}{2} = 1$

1. Se puede observar en la gráfica que la abscisa al origen es -1 y la ordenada al origen 1
   Se sustituyen estos valores en la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $\quad \frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$ $\quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$

Actividad 4

1. Se sustituyen el valor de la pendiente y el punto en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$
   $y - 3 = -2(x - 2)$ $\quad y - 3 = -2x + 4$ $\quad$ Se pasa todo al lado izquierdo
   $y - 3 + 2x - 4 = 0$ $\quad 2x + y - 7 = 0$

2. Se sustituyen el valor de la pendiente y el punto en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$
   $y - 4 = 3[x - 2]$ $\quad y - 4 = 3x - 6$ $\quad$ Se pasa todo al lado derecho
   $3x - 6 - y + 4 = 0$ $\quad 3x - y - 2 = 0$

3. Se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{-2 - 2}{-3 - 5} = \frac{-4}{-8}$ $\quad m = 0.5$
   Se sustituyen las coordenadas del punto A y el valor de la pendiente en la ecuación de la forma punto pendiente:
   $y - (-2) = 0.5[x - (-3)]$ $\quad y + 2 = 0.5x + 1.5$
   Se pasan todos los términos del lado derecho para que quede el valor de x positivo:
   $0.5x + 1.5 - y - 2 = 0$ $\quad 0.5x - y - 0.5 = 0$

4. Se calcula la pendiente de la recta: $m = \frac{-3 - 1}{-3 - 5} = \frac{-4}{-8}$ $\quad m = 0.5$
   Se sustituyen las coordenadas del punto A y el valor de la pendiente en la ecuación de la forma punto pendiente:
   $y - (-2) = 0.5[x - (-3)]$ $\quad y + 2 = 0.5x + 1.5$
   Se pasan todos los términos del lado derecho para que quede el valor de x positivo:
   $0.5x + 1.5 - y - 2 = 0$ $\quad 0.5x - y - 0.5 = 0$

5. Se calcula el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores 4 y 2
   $$\text{mcm} = (4)(2) = 8$$

Se multiplican ambos miembros de la ecuación original por el mcm

$8\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right)=8(1)$ $\frac{8x}{4}-\frac{8y}{2}=8$ $2x-4y=8$ $2x-4y-8=0$

1. mcm=(2)(6)=12 $12\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{6}\right)=12(1)$ $\frac{12x}{2}+\frac{12y}{6}=12$ $6x+2y=12$ $6x+2y-12=0$

2. Despejando y: $-4y=-8x+20$ $y=\frac{-8x+20}{-4}$ $y=2x-5$
   Pendiente: 2 Ordenada al origen: -5

3. Despejando y: $3y=9x-15$ $y=\frac{9x-15}{3}$ $y=3x-5$
   Pendiente: 3 Ordenada al origen: -5

Actividad 5

1. Se sustituyen los valores de p y el ángulo en la fórmula $x\cos\theta+y\operatorname{sen}\theta-p=0$
   $x\cos 39.29°+y\operatorname{sen} 39.29°-7.34=0$ $0.7740x+0.6332y-7.34=0$

2. $x\cos 297.61°+y\operatorname{sen} 297.61°-4.17=0$ $0.4635x-0.8861y-4.17=0$

3. $x\cos 309.6°+y\operatorname{sen} 309.6°-3.7=0$ $0.6374x-0.7705y-3.7=0$

Actividad 6

1. $d=\left|\frac{2(-2)-3(4)-3}{\pm\sqrt{(2)^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-4-12-3}{\pm\sqrt{4+9}}\right|=\left|\frac{-19}{\pm\sqrt{13}}\right|$ $d=|-5.27|$ $d=5.27$

2. $d=\left|\frac{3(2)-4(-1)+10}{\pm\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}\right|=\left|\frac{6+4+10}{\pm\sqrt{9+16}}\right|=\left|\frac{20}{\pm\sqrt{25}}\right|$ $d=|4|$ $d=4$

3. $d=\left|\frac{-2(3)-3(5)+6}{\pm\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-6-15+6}{\pm\sqrt{4+9}}\right|=\left|\frac{-15}{\pm\sqrt{13}}\right|$ $d=|-4.16|$ $d=4.16$

4. $d=\left|\frac{-5(-3)-4(1)+8}{\pm\sqrt{(-5)^2+(-4)^2}}\right|=\left|\frac{15-4+8}{\pm\sqrt{25+16}}\right|=\left|\frac{19}{\pm\sqrt{41}}\right|$ $d=|2.97|$ $d=2.97$

Actividad 7

Encuentra la distancia dirigida entre las rectas de las figuras:

1) Se hace $x = 0$ $-5(0) + 4y = 10$ $y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ Obtenemos el punto $(0, \frac{5}{2})$

$$d = \left|\frac{-5(0)+4\left(\frac{5}{2}\right)+8}{\pm\sqrt{(-5)^2+(4)^2}}\right| = \left|\frac{0+10+8}{\pm\sqrt{25+16}}\right| = \left|\frac{18}{\pm\sqrt{41}}\right| \qquad d = |2.81| \qquad \boldsymbol{d = 2.81}$$

2) Se hace $x = 0$ $-3(0) - 7y = 34$ $y = \frac{34}{-7}$ Obtenemos el punto $(0, -\frac{34}{7})$

$$d = \left|\frac{-3(0)-7\left(\frac{-34}{7}\right)+7}{\pm\sqrt{(-3)^2+(-7)^2}}\right| = \left|\frac{0+34+7}{\pm\sqrt{9+49}}\right| = \left|\frac{41}{\pm\sqrt{58}}\right| \qquad d = |5.38| \qquad \boldsymbol{d = 5.38}$$

3) Se hace $x = 0$ $-2(0) + 5y = 6$ $y = \frac{6}{5}$ Obtenemos el punto $(0, \frac{6}{5})$

$$d = \left|\frac{-2(0)+5\left(\frac{6}{5}\right)+10}{\pm\sqrt{(-2)^2+(5)^2}}\right| = \left|\frac{0+6+10}{\pm\sqrt{4+25}}\right| = \left|\frac{16}{\pm\sqrt{29}}\right| \qquad d = |2.97| \qquad \boldsymbol{d = 2.97}$$

Bloque V

Evaluación diagnóstica.

1. El círculo es el área limitada por la circunferencia, que es el perímetro.

2. $r = 4$

   $A = \pi r^2 = (3.14)\,(4)^2 = 50.24$ u

   $P = 2\pi r = 2(3.14)(4) = 25.12$ u

3. Se encuentran las coordenadas del centro, con la fórmula del punto medio:

   $P_M = \left(\frac{-4+10}{2},\ \frac{-4-6}{2}\right) = \left(\frac{6}{2},\ \frac{-10}{2}\right)$ Las coordenadas del centro son C(3, -5)

   El radio se calcula con la distancia entre el centro y el punto A

   $r = \sqrt{(-4-3)^2 + (-4-(-5))^2} = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} = \sqrt{50}$ $\quad r = 7.07$

4. $(x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$

5. $(y+9)^2 = y^2 + 18y + 81$

6.

   (1) $2x - 3y - 5z = -19$

   (2) $3x - 4y + z = -2$

   (3) $x + y + z = 6$

Tomar las ecuaciones (1) y (2) y eliminar z $2x - 3y - 5z = -19$ (1) $3x - 4y + z = -2$ (5) $2x - 3y - 5z = -19$ $15x - 20y + 5z = -10$ $17x - 23y = -29$ (ec. 4)	Tomar las ecuaciones (1) y (3) y eliminar z $2x - 3y - 5z = -19$ (1) $x + y + z = 6$ (5) $2x - 3y - 5z = -19$ $5x + 5y + 5z = 30$ $7x + 2y = 11$ (ec. 5)
Tomar las ecuaciones (4) y (5) y eliminar y $17x - 23y = -29$ (2) $7x + 2y = 11$ (23) $34x - 46y = -58$ $161x + 46y = 253$ $195x = 195$ $x = \frac{195}{195}$ $\quad x = 1$	Sustituir el valor de x en las ecuaciones 4 o 5 $17(1) - 23y = -29$ $17 - 23y = -29$ $-23y = -29 - 17$ $y = \frac{-46}{-23}$ $y = 2$
Sustituir los valores de x y y en la ecuación 1, 2 o 3 $x + y + z = 6$ $1 + 2 + z = 6$ $z = 6 - 1 - 2$ $\quad z = 3$	

7. $(x-8)^2 + (y+7)^2 = 4$ $\qquad x^2 - 16x + 64 + y^2 + 14y + 49 = 4$
$x^2 + y^2 - 16x + 14 + 64 + 49 - 4 = 0$ $\qquad x^2 + y^2 - 16x + 123 = 0$

8. $r = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9} =$ $\qquad r = 3$

Actividad 1

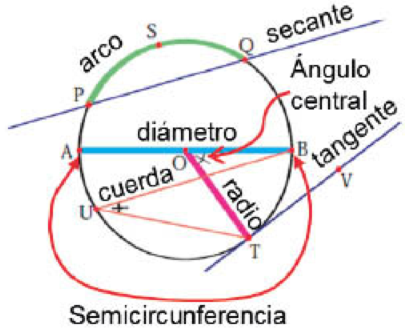
1. Se obtiene al girar la generatriz (recta generadora L) alrededor de otra recta o eje (E), manteniendo siempre el mismo ángulo de giro entre ambas rectas.

2. Respuesta libre.

3. Condiciones que deben existir para que se formen las cónicas:

Circunferencia	Parábola	Elipse	Hipérbola
Cuando el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje del cono.	Cuando el plano que corta de manera oblicua a uno de los mantos de la superficie cónica es paralelo a una generatriz.	Cuando el plano corta de manera oblicua cada generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica.	Cuando el plano corta de manera oblicua ambos mantos de la superficie cónica y es paralelo a ambas generatrices.

4. Elementos que componen la circunferencia.



5. Relaciona ambas columnas.

a) Semicircunferencia	(g) Es cualquier segmento que une el centro, con un punto P de la circunferencia.
b) Arco	(e) Es la superficie limitada por la circunferencia
c) Diámetro	(d) Es el ángulo formado por dos radios.
d) Ángulo central	(b) Es una porción de circunferencia, cuya representación es con el símbolo $\frown$
e) Círculo	(f) Es el segmento que uno a dos puntos de la circunferencia.
f) Cuerda	(c) Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia, cuya longitud es el doble de la longitud del radio.
g) Radio	(h) Es cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.
h) Secante	(i) Es cualquier recta que toca la circunferencia en un solo punto.
i) Tangente	(a) Es un arco igual a la mitad de la circunferencia.

Actividad 2

1. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio = 3:

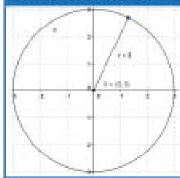
Las condiciones que proporciona el problema son $C(0,0)$ y $r = 3$

Sustituimos los valores de $h = 0$, $k = 0$ y $r = 3$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (3)^2$

$x^2 + y^2 = 9^2$ Forma canónica

2. Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia:



Las condiciones que proporciona el problema son $C(0,0)$ y $r = 3$

Sustituimos los valores de $h = 0$, $k = 0$ y $r = 3$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (3)^2$

$x^2 + y^2 = 9$ Forma canónica

3. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en C(2,5) y radio = 6:

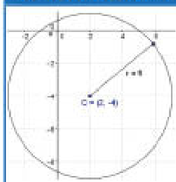
Se sustituyen los valores de h = 2, k = 5 y r = 6 en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (6)^2$ *Forma canónica*

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 36$

$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$ *Forma general*

4. Encuentra la ecuación de la siguiente circunferencia:



Se sustituyen los valores de $h = 2$, $k = -4$ y $r = 5$ en la forma:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = (5)^2$ Forma canónica

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 25$

$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ Forma general

5. Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de los diámetros son $A(-4,7)$ y $B(10,-3)$:

Se encuentran las coordenadas del centro, con la fórmula del punto medio:

$P_M = \left(\frac{-4 + 10}{2}, \frac{7 - 3}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (3, 2)$ Las coordenadas del centro son C(3, 2)

El radio se calcula con la distancia entre el centro y el punto A

$r = \sqrt{(-4 - 3)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$ $r = 8.6$

Se sustituyen los valores de h = 3, k = 2 y r = 8.6 en la forma:

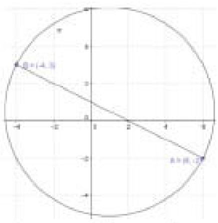
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (8.6)^2$ *Forma canónica*

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 74$

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 61 = 0$ *Forma general*

6. Encuentra la ecuación de la circunferencia que presenta las siguientes condiciones:

Se encuentran las coordenadas del centro, con la fórmula del punto medio:



$P_M = \left(\frac{6-4}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, 0.5)$ Las coordenadas del centro son $C(1, 0.5)$

El radio se calcula con la distancia entre el centro y el punto A

$r = \sqrt{(6-(-4))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125}$ $\quad r = 11.18$

Se sustituyen los valores de h = 1, k = 0.5 y r = 11.18 en la forma:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (x-1)^2 + (y-0.5)^2 = (11.18)^2$ *Forma canónica*

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + 0.25 = 125$

$x^2 + y^2 - 2x - y - 123.75 = 0$ *Forma general*

7. Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyos extremos de uno de los diámetros son A(-1,5) y B(-5,-1)

Se encuentran las coordenadas del centro, con la fórmula del punto medio:

$P_M = \left(\frac{-1-5}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$ Las coordenadas del centro son C(-3, 2)

El radio se calcula con la distancia entre el centro y el punto A

$r = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{(4)^2 + (6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$ $\quad r = 7.2$

Se sustituyen los valores de h = -3, k = 2 y r = 7.2 en la forma:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (x-(-3))^2 + (y-2)^2 = (7.2)^2$ Forma canónica

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 52$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 39 = 0$ *Forma general*

8. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1,3) y B(4,-1)

Se encuentran las coordenadas del centro, con la fórmula del punto medio:

$P_M = \left(\frac{-1+4}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1.5, 1)$ Las coordenadas del centro son C(1.5, 1)

El radio se calcula con la distancia entre el centro y el punto A

$r = \sqrt{(-1-1.5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-2.5)^2 + (2)^2} = \sqrt{6.25+4} = \sqrt{10.25}$ $\quad r = 3.2$

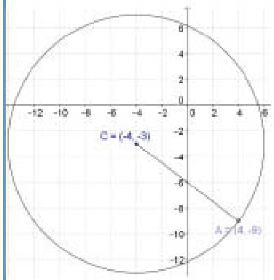
Se sustituyen los valores de h = 1.5, k = 1 y r = 3.2 en la forma:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (x-1.5)^2 + (y-1)^2 = (3.2)^2$ *Forma canónica*

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 - 3x + 2.25 + y^2 - 2y + 1 = 10.25$

$x^2 + y^2 - 3x - 2y - 7 = 0$ *Forma general*

9. Encuentra la ecuación de la circunferencia que presenta las siguientes condiciones:



El radio se calcula con la distancia entre el centro y el punto A

$r = \sqrt{(4 - (-4))^2 + (-9 - (-3))^2} = \sqrt{(8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100}$ $r = 10$

Se sustituyen los valores de $h = -4$, $k = -3$ y $r = 10$ en la forma:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ $(x+4)^2 + (y+3)^2 = (10)^2$ *Forma canónica*

Al desarrollar los cuadrados: $x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 100$

$x^2 + y^2 + 8x + 6y - 75 = 0$ *Forma general*

10. Ecuación de la circunferencia con centro $C(13,-6)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$

Se calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta con la fórmula:

$d = \left|\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$, tomando los valores del centro C(x,y) para sustituirlos en dicha fórmula, y el resultado será el radio.

$d = \left|\frac{3(13)-4(-6)-13}{\pm\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}\right| = \left|\frac{39+24-13}{\pm\sqrt{9+16}}\right| = \left|\frac{50}{\pm\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{50}{5}\right| = |10| = 10$ $r = 10$

Se sustituyen los valores del centro $C(13, 6)$ y el radio $r = 10$ en la forma ordinaria

$(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = (10)^2$ Forma canónica

$x^2 - 26x + 169 + y^2 - 12y + 36 - 100 = 0$

$x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$ Forma general

11. Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en $C(10,-5)$ y es tangente a la recta $4x + 3y - 50 = 0$

Se calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta con la fórmula:

$d = \left|\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|$, tomando los valores del centro $C(x,y)$ para sustituirlos en dicha fórmula, y el resultado será el radio.

$d = \left|\frac{4(10)+3(-5)-50}{\pm\sqrt{(4)^2+(3)^2}}\right| = \left|\frac{40-15-50}{\pm\sqrt{9+16}}\right| = \left|\frac{-25}{\pm\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{-25}{5}\right| = |-5| = 5$ $r = 5$

Se sustituyen los valores del centro $C(10, -5)$ y el radio $r = 5$ en la forma ordinaria

$(x - 10)^2 + (y - (-5))^2 = (5)^2$ Forma canónica

$x^2 - 20x + 100 + y^2 + 10y + 25 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$ Forma general

12. Ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5,10)$, $B(7,4)$ y $C(-9,-4)$

Se sustituyen los valores de cada punto en la ecuación general de la circunferencia
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Punto $A(5, 10)$
$(5)^2 + (10)^2 + D(5) + E(10) + F = 0$
$25 + 100 + 5D + 10E + F = 0$
$5D + 10E + F = -125$ (ec. 1)

Punto $B(7, 4)$
$(7)^2 + (4)^2 + D(7) + E(4) + F = 0$
$49 + 16 + 7D + 4E + F = 0$
$7D + 4E + F = -65$ (ec. 2)

Punto $C(-9,-4)$
$(-9)^2 + (-4)^2 + D(-9) + E(-4) + F = 0$
$81 + 16 - 9D - 4E + F = 0$
$-9D - 4E + F = -97$ (ec. 3)

Se forma un sistema de tres ecuaciones con 3 variables
(1) $5D + 10E + F = -125$
(2) $7D + 4E + F = -65$
(3) $-9D - 4E + F = -97$

Resolviendo por el método de suma y resta

Tomar las ecuaciones (1) y (2) y eliminar F
$5D + 10E + F = -125$ (1)
$7D + 4E + F = -65$ (-1)
$5D + 10E + F = -125$
$-7D - 4E - F = 65$
$-2D + 6E = -60$ (ec. 4)

Tomar las ecuaciones (1) y (3) y eliminar F
$5D + 10E + F = -125$ (1)
$-9D - 4E + F = -97$ (-1)
$5D + 10E + F = -125$
$9D + 4E - F = 97$
$14D + 14E = -28$ (ec. 5)

Se toman las ecuaciones (4) y (5) y eliminar D
$-2D + 6E = -60$ (14) (7)
$14D + 14E = -28$ (2) (1)
$-14D + 42E = -420$
$14D + 14E = -28$
$56E = -448$
$E = \frac{-448}{56}$ $E = -8$

Se sustituye el valor de D en la ec. 4 o 5
$-2D + 6(-8) = -60$
$-2D - 48 = -60$
$-2D = -60 + 48$
$D = \frac{-12}{-2}$ $D = 6$

$14D + 14(-8) = -28$
$14D - 112 = -28$
$14D = -28 + 112$
$D = \frac{84}{14}$ $D = 6$

Se sustituyen los valores de D y E en la ecuación 1, 2 o 3, en cualquiera de las 3

Sustituyendo en la ec. 1
$5(6) + 10(-8) + F = -125$
$30 - 80 + F = -125$
$F = -125 - 30 + 80$
$F = -75$

Sustituyendo en la ec. 2
$7(6) + 4(-8) + F = -65$
$42 - 32 + F = -65$
$F = -65 - 42 + 32$
$F = -75$

Sustituyendo en la ec. 3
$-9(6) - 4(-8) + F = -97$
$-54 + 32 + F = -97$
$F = -97 + 54 - 32$
$F = -75$

Se sustituyen los valores de D, E y F en la forma general
$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 75 = 0$ Forma general

13. Ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-4,-1)$, $B(12,7)$ y $C(-10, 11)$

Se sustituyen los valores de cada punto en la ecuación general de la circunferencia
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Punto $A(-4, -1)$
$(-4)^2 + (-1)^2 + D(-4) + E(-1) + F = 0$
$16 + 1 - 4D - E + F = 0$
$-4D - E + F = -17$ (ec. 1)

Punto $B(12, 7)$
$(12)^2 + (7)^2 + D(12) + E(7) + F = 0$
$144 + 49 + 12D + 7E + F = 0$
$12D + 7E + F = -193$ (ec. 2)

Punto $C(-10, 11)$
$(-10)^2 + (11)^2 + D(-10) + E(11) + F = 0$
$100 + 121 - 10D + 11E + F = 0$
$-10D + 11E + F = -221$ (ec. 3)

Se forma un sistema de 3 ecuaciones con 3 variables
(1) $-4D - E + F = -17$
(2) $12D + 7E + F = -193$
(3) $-10D + 11E + F = -221$

Resolviendo por el método de suma y resta

Tomar las ecuaciones (1) y (2) y eliminar F
$-4D - E + F = -17$ (1)
$12D + 7E + F = -193$ (-1)
$-4D - E + F = -17$
$-12D - 7E - F = 193$
$-16D - 8E = 176$ (ec. 4)

Tomar las ecuaciones (1) y (3) y eliminar F
$-4D - E + F = -17$ (1)
$-10D + 11E + F = -221$ (-1)
$-4D - E + F = -17$
$10D - 11E - F = 221$
$6D - 12E = 204$ (ec. 5)

Se toman las ecuaciones (4) y (5) y eliminar D
$-16D - 8E = 176$ (6) (3)
$6D - 12E = 204$ (16) (8)
$-48D - 24E = 528$
$48D - 96E = 1632$
$-120E = 2160$
$E = \frac{2160}{-120}$ $E = -18$

Se sustituye el valor de E en la ec. 4 o 5
$-16D - 8(-18) = 176$
$-16D + 144 = 176$
$-16D = 176 - 144$
$D = \frac{32}{-16}$ $D = -2$

$6D - 12(-18) = 204$
$6D + 216 = 204$
$6D = 204 - 216$
$D = \frac{-12}{6}$ $D = -2$

Se sustituyen los valores de D y E en la ecuación (1), (2) o (3), en cualquiera de las tres

Sustituyendo en la ec. 1
$-4(-2) - (-18) + F = -17$
$8 + 18 + F = -17$
$F = -17 - 8 - 18$
$F = -43$

Sustituyendo en la ec. 2
$12(-2) + 7(-18) + F = -193$
$-24 - 126 + F = -193$
$F = -193 + 24 + 126$
$F = -43$

Sustituyendo en la ec. 3
$-10(-2) + 11(-18) + F = -221$
$20 - 198 + F = -221$
$F = -221 - 20 + 198$
$F = -43$

Se sustituyen los valores de D, E y F en la forma general

$x^2 + y^2 - 2x - 18y - 43 = 0$ Forma general

Bloque VI

Evaluación diagnóstica.

1. Una circunferencia es una curva cerrada, con la misma distancia desde su centro a cualquiera de sus lados. Mientras que la parábola es una curva que se abre de manera infinita hacia arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda, con un punto más alto o bajo llamado vértice.

2. Cuando el plano que corta de manera oblicua a uno de los mantos de la superficie cónica es paralelo a una generatriz

3. Para la ecuación $y^2 = 5x$:

   a) La extensión de la variable x, se despeja la variable y:
   $y = \pm\sqrt{5x}$ Como el valor de x está dentro de una raíz y esta no puede ser negativa, x podrá tomar únicamente valores positivos o cero, es decir, $x \geq 0$.

   b) La extensión de la variable y, se despeja la variable x:
   $\frac{y^2}{5} = x$ Como el valor de y está en el numerador de la fracción, no tiene restricción de valores, es decir, puede tomar cualquiera. $-\infty \leq y \leq +\infty$

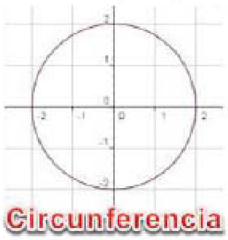
4. Dada la ecuación $y^2 = -5x$ determina:
   a) La extensión de la variable x:
   $y = \pm\sqrt{-5x}$ Como el valor de x está dentro de una raíz y esta no puede ser negativa, x tendrá que ser negativa, para que al multiplicarla con -5 quede la raíz positiva. $x \leq 0$.

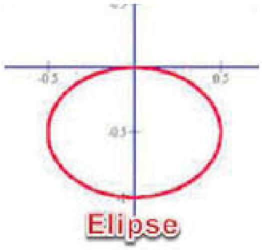
   b) La extensión de la variable y:
   $\frac{y^2}{-5} = x$ Como el valor de y está en el numerador de la fracción, no tiene restricción de valores, es decir, puede tomar cualquiera. $-\infty \leq y \leq +\infty$

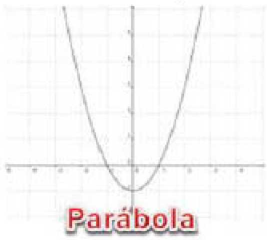
5. Dada la ecuación $x^2 = -5y$ determina la extensión de la variable y
   $x = \pm\sqrt{-5y}$ Como el valor de y está dentro de una raíz y esta no puede ser negativa, y tendrá que ser negativa, para que al multiplicarla con -5 quede la raíz positiva. $y \leq 0$.

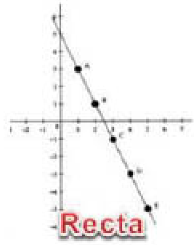
6. Dada la ecuación $x^2 = -5y$ determina la extensión de la variable x
   $\frac{x^2}{-5} = y$ Como el valor de x está en el numerador de la fracción, no tiene restricción de valores, es decir, puede tomar cualquiera. $-\infty \leq x \leq +\infty$

7. Indica qué tipo de función representa cada una de las siguientes gráficas:









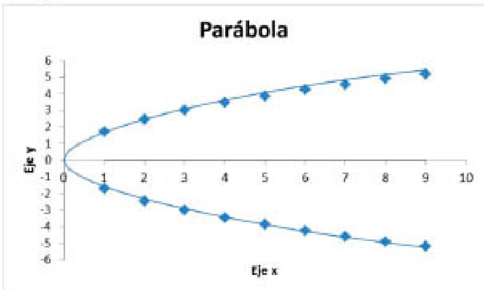
8. Completa la siguiente tabla dada la ecuación $y^2 = 3x$ $(y = \pm\sqrt{3x})$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	± 1.7	±2.4	±3	±3.5	±3.9	±4.2	4.6±	±4.9	±5.2

9. $x^2 + 12x = 3 \quad x^2 + 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \quad x^2 + 12x + (6)^2 = 3 + (6)^2$

$x^2 + 12x + 36 = 3 + 36 \quad (x + 6)^2 = 39$

10. Grafica la ecuación del ejercicio anterior con los resultados obtenidos en la tabla

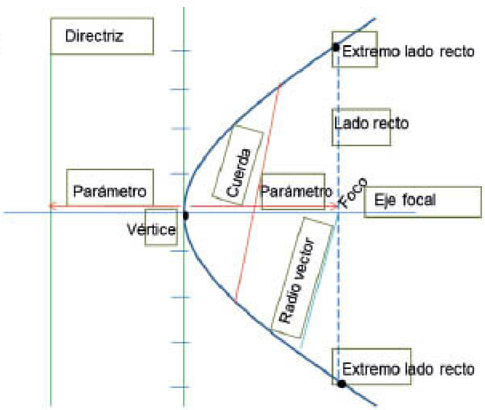


Actividad 1

1. La parábola abre hacia la derecha y hacia la izquierda cuando está sobre el eje horizontal *x*.

2. La parábola abre hacia arriba y hacia abajo cuando está sobre el eje horizontal *y*.

3. Elementos de la parábola:



4. Encuentra los elementos de la parábola con vértice en el origen y foco en $F(-3,0)$

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la izquierda, con foco $F(-a, 0)$ y tiene la forma:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$

a) El parámetro $a = 3$

b) Su ecuación $y^2 = 4(-3)x$ $\quad y^2 = -12x$

c) Su directriz está en $x = 3$ $\quad x = 3$

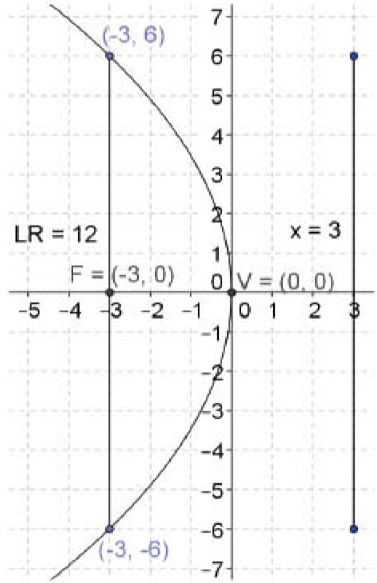
d) La longitud del lado recto LR $\quad LR = |4(3)|$ $\quad LR = 12$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = -3$

$y^2 = -4ax \quad y^2 = -4(3)(-3) \quad y^2 = 36 \quad y = \pm\sqrt{36} \quad y = \pm 6$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (-3,6) y (-3,-6)



5. Encuentra los elementos de la parábola que abre hacia arriba, cuya directriz es $y = -2$

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = 4ay$	$(0,a)$	$y = -a$

a) Como la directriz es $y = -2$, el parámetro $a = 2$

b) Su ecuación $x^2 = 4(2)y$ $\quad x^2 = 8y$

c) Las coordenadas del foco $\quad F(0, 2)$

d) La longitud del lado recto $\quad LR = |4(2)|$ $\quad LR = 8$

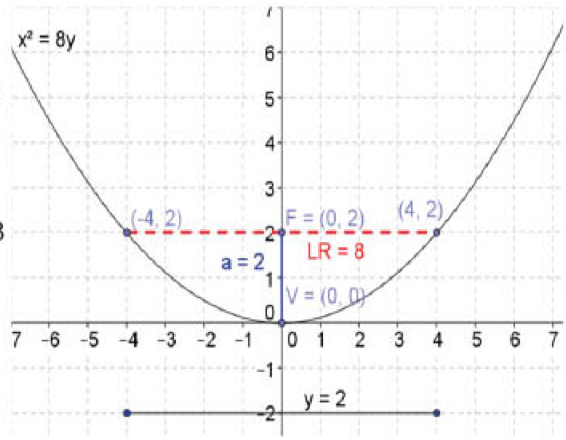
e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = 2$

$x^2 = 4ay \quad x^2 = 4(2)(2) \quad x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16} \quad x = \pm 4$

Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (4, 2) y (-4, 2)



6. Encuentra los elementos de la parábola cuyo foco está en $F(0,-5)$ y centro en el origen

Ecuación	Foco	Directriz
$x^2 = -4ay$	$(0,-a)$	$y = a$

a) El parámetro $a = 5$

b) Su ecuación $x^2 = -4(5)y$ $\quad x^2 = -20y$

c) Su directriz está en $\quad y = 5$

d) La longitud del lado recto LR

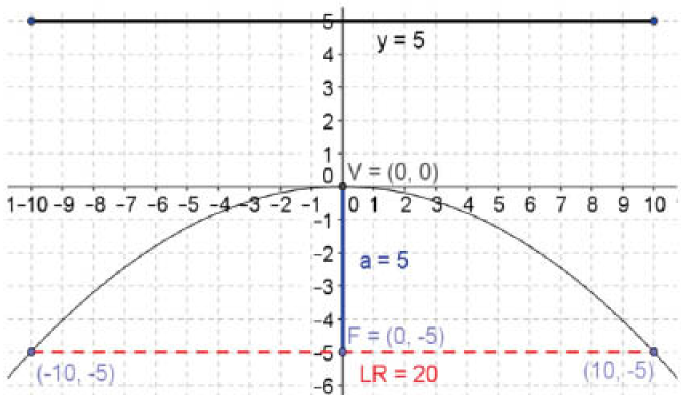
$LR = |4(5)| \quad LR = |20| \quad LR = 20$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = -5$

$x^2 = -4ay \quad x^2 = -4(-5)(5)$

$x^2 = 100 \quad x = \pm\sqrt{100} \quad x = \pm 10$



Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son: (10, -5) y (-10, -5)

7. Encuentra los elementos de la parábola que abre hacia la derecha, cuyo $LR = 8$

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la derecha:

Ecuación	Foco	Directriz
$y^2 = 4ax$	$(a,0)$	$x = -a$

a) Como $LR = |4a| \quad 8 = 4a \quad a = 2$

b) Su ecuación $y^2 = 4(2)x \quad y^2 = 8x$

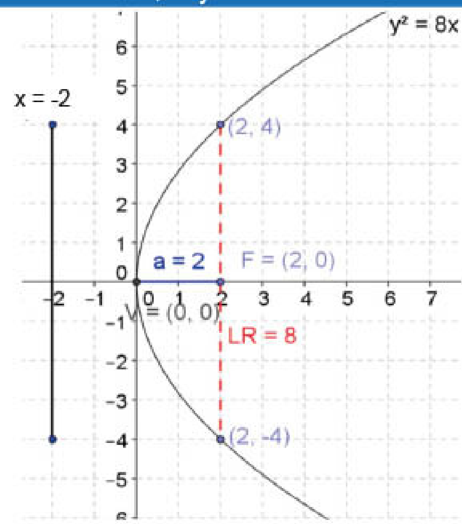
c) Su directriz está en $\quad x = -2$

d) Su foco está en $\quad F(2, 0)$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.

Se toma el valor de la abscisa del foco, es decir, $x = 2$

$y^2 = 4ax \quad y^2 = 4(2)(2) \quad y^2 = 16 \quad y = \pm\sqrt{16} \quad y = \pm 4$



Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (2, 4) y (2, -4)

8. Encuentra los elementos de la parábola $x^2 = -16y$

Ecuación Foco Directriz

$x^2 = -4ay$ $(0,-a)$ $y = a$

a) El parámetro $-4a = -16$ $a = 4$

b) Su foco $F(0, -4)$ $F(0, -4)$

c) Su directriz está en $y = 4$

d) La longitud del lado recto LR

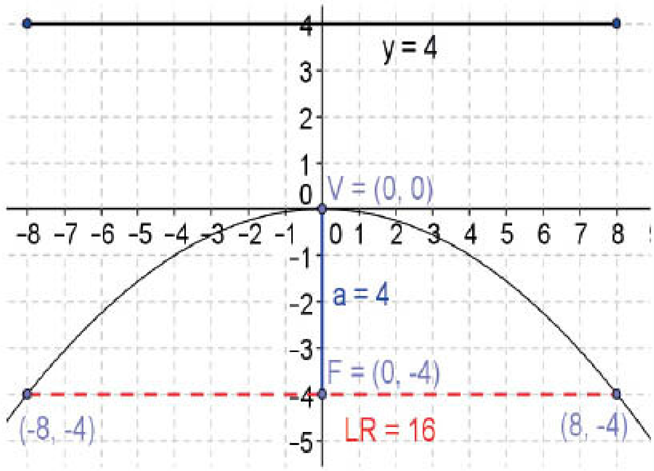
$LR = |\mathbf{4(4)}|$ $LR = |\mathbf{16}|$ $LR = 16$

e) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto:

Se toma el valor de la ordenada del foco, es decir, $y = -4$

$x^2 = -4ay$ $x^2 = -4(-4)(4)$

$x^2 = 64$ $x = \pm\sqrt{\mathbf{64}}$ $x = \pm 8$



Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son: (8, -4) y (8, 4)

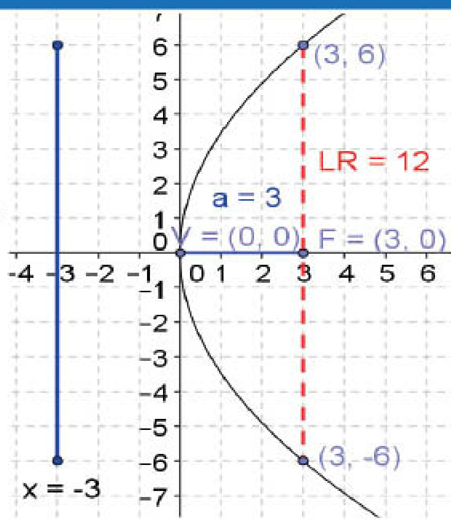
9. Encuentra los elementos de la parábola cuyas coordenadas del lado recto son $M(3,6)$ y $N(3,-6)$

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una parábola que abre hacia la derecha:

Ecuación Foco Directriz

$y^2 = 4ax$ $(a,0)$ $x = -a$

Como la ordenada de las coordenadas de los puntos extremos del lado recto es ±6 y la abscisa es 3, al elevarla al cuadrado nos da 36, que es el valor de $4a(3)$



a) El parámetro es $12a = 36$ $a = 3$

b) Su lado recto es $LR = |\mathbf{4(3)}|$ $LR = 12$

c) Su ecuación $y^2 = 4(3)x$ $y^2 = 12x$

d) Su directriz está en $x = -3$

e) Su foco está en $F(3, 0)$

f) Su directriz es $x = -3$

Actividad 2

1. Escribe la ecuación de la parábola con vértice fuera del origen en sus formas:

Ordinaria	General
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$y^2 \pm by \pm cx \pm d = 0$

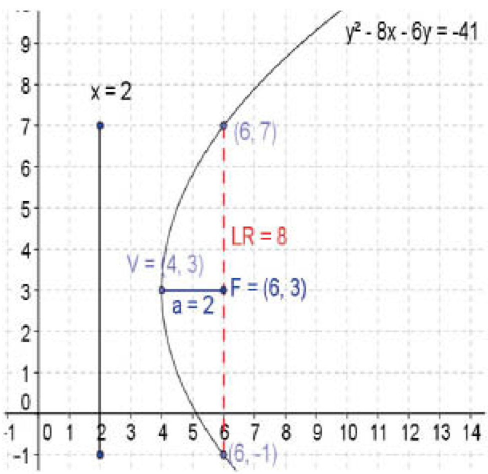
2. Respuesta libre.
3.

Elemento	Procedimiento para obtenerlo
Coordenadas del vértice	De la fórmula $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ se extraen los valores de h y k de manera directa.
Parámetro	Se obtiene de dividir entre 4 el máximo común divisor que resultó del lado derecho de la factorización $4a(x-h)$, ya que el máximo común divisor es igual a $4a$.
Coordenadas del foco	Están determinadas por la relación $(h+a, k)$
Lado recto	Están determinado por la relación $LR = \|4a\|$
Directriz	Se obtiene por la relación $x = h - a$
Coordenadas de los extremos del lado recto	Se divide el lado recto entre 2, y se suma y resta el resultado a la ordenada del foco.

4. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (4, 3) y su foco en $F(6, 3)$

Como el foco está después del vértice, la parábola abre hacia la derecha, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(h+a, k)$	$x = h - a$	$LR = \|4a\|$



a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 6 - 4$ $\quad a = 2$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-3)^2 = 4(2)(x-4)$ $\quad (y-3)^2 = 8(x-4)$

c) Desarrollamos para la ecuación en forma general:
$y^2 - 6y + 9 = 8x - 32$ $\quad y^2 - 6y + 9 - 8x + 32 = 0$
Reduciendo términos $\quad y^2 - 6y - 8x + 41 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a$ $\quad x = 4 - 2$ $\quad x = 2$

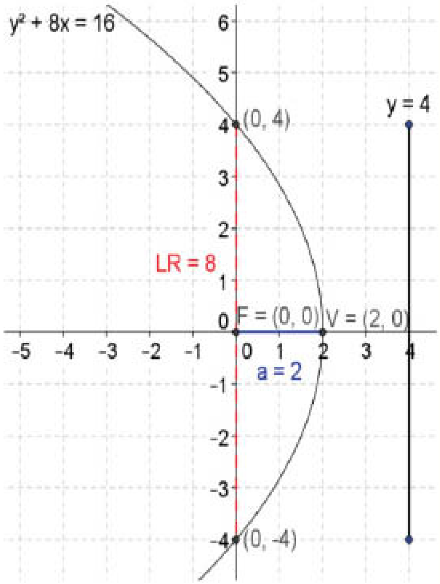
e) La longitud del lado recto LR $\quad LR = |4(2)|$ $\quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos arriba de él y 4 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 4 a la ordenada del foco k, obteniendo $k + 4 = 3 + 4 = 7$
$k - 4 = 3 - 4 = -1$, por lo que las coordenadas de los puntos extremos del lado recto son (6, 7) y (6, -1)

5. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (2, 0) y su foco en $F(0, 0)$

Como el foco está antes del vértice, la parábola abre hacia la izquierda, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(h-a, k)$	$x = h - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$



a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 0 - 2 \quad a = -2$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(y-0)^2 = 4(-2)(x-2) \qquad (y)^2 = -8(x-2)$

c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$y^2 = -8x + 16 \qquad y^2 + 8x - 16 = 0$

d) Su directriz está en $x = h - a \quad x = 2 - (-2) \qquad x = 4$

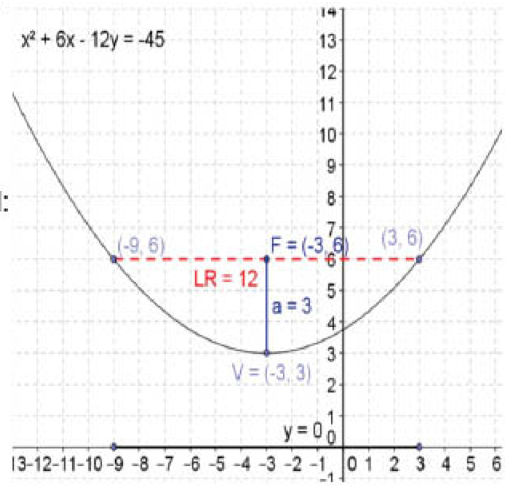
e) La longitud del lado recto $LR \quad LR = \lvert 4(-2) \rvert \quad LR = 8$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 8, existen 4 puntos arriba de él y 4 puntos debajo de él, por lo que se suma y se resta 4 a la ordenada del foco k, obteniendo $k + 4 = 0 + 4 = 4$
$0 - 4 = -4$, por lo que las coordenadas son (0, 4) y (0, -4)

6. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (-3, 3) y su foco en F(-3, 6)

Como el foco está arriba del vértice, la parábola abre hacia arriba, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, k+a)$	$y = k - a$	$LR = \lvert 4a \rvert$



a) El parámetro: $a = \overline{VF} = 6 - 3 \qquad a = 3$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(x-(-3))^2 = 4(3)(y-3) \qquad (x+3)^2 = 12(y-3)$

c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$x^2 + 6x + 9 = 12y - 36 \quad x^2 + 6x + 9 - 12y + 36 = 0$
Reduciendo términos $\qquad x^2 + 6x - 12y + 45 = 0$

d) Su directriz está en $y = k - a \quad y = 3 - 3 \qquad y = 0$

e) La longitud del lado recto $LR \quad LR = \lvert 4(3) \rvert \quad LR = 12$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 12, existen 6 puntos a la Izquierda y 6 puntos a la derecha de él, por lo que se suma y se resta 6 a la abscisa del foco h, obteniendo $h + 6 = -3 + 6 = 3$ y $h - 6 = -3 - 6 = -9$, por lo que las coordenadas son (-9, 6) y (3, 6)

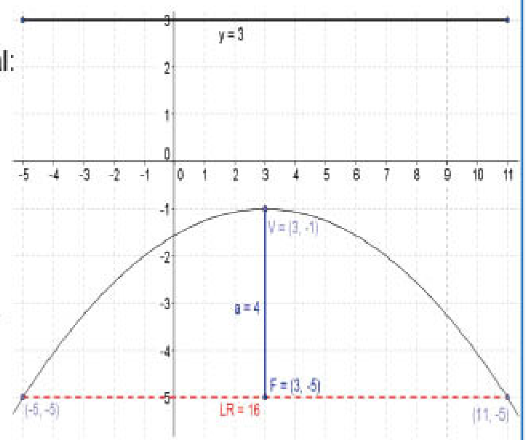
7. Encuentra la ecuación de la parábola en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, cuyo vértice está en el punto (3, -1) y su foco en $F(3, -5)$

Como el foco está abajo del vértice, la parábola abre hacia abajo, con condiciones:

Ecuación	Foco	Directriz	Lado recto
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, k+a)$	$y = k - a$	$LR = \|4a\|$

a) El parámetro: $a = \overline{VF} = -5 - (-1)$ $\quad a = -4$

b) Su ecuación en forma ordinaria:
$(x-3)^2 = 4(-4)(y-(-1))$ $\quad (x-3)^2 = -16(y+1)$



c) Desarrollamos para la ecuación en su forma general:
$x^2 - 6x + 9 = -16y - 16$ $\quad x^2 - 6x + 9 + 16y + 16 = 0$
Reduciendo términos $\quad x^2 - 6x + 16y + 25 = 0$

d) Su directriz está en $y = k - a$ $\quad y = -1 - (-4)$ $\quad y = 3$

e) La longitud del lado recto $\quad LR = |4(-4)|$ $\quad LR = 16$

f) Coordenadas de los puntos extremos del lado recto.
Como el lado recto son 16, existen 8 puntos a la Izquierda y 8 puntos a la derecha de él, por lo que se suma y se resta 8 a la abscisa del foco h, obteniendo $h + 8 = 3 + 8 = 11$ y $h - 8 = 3 - 8 = -5$, y las coordenadas son (-5, -5) y (-5, 11)

8. Encuentra la ecuación de la parábola en su formas ordinaria dada la ecuación $y^2 + 8y + 20x + 56 = 0$, además de todos sus elementos.

1) Se separan los términos de y a la izquierda y los términos de x a la derecha.
$y^2 + 8y = -20x - 56$

2) Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en y entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando éste término en ambos lados de la ecuación.

$y^2 + 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -20x - 56 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$ $\qquad y^2 + 8y + (4)^2 = -20x - 56 + (4)^2$

$y^2 + 8y + 16 = -20x - 56 + 16$ $\qquad y^2 + 8y + 16 = -20x - 40$

3) Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, quedando la ecuación de la forma $(y-k)^2 = 4a(x - \text{h})$
$(y+4)^2 = -20(x+2)$ Ésta es la ecuación en su forma ordinaria.

- Las coordenadas del vértice. Como la ecuación está en la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$
$k = -4$, $h = -2$. Por lo tanto, las coordenadas del vértice son (h, k) (-2, -4)

- El parámetro a.
Extraemos el factor común de la parte derecha, que es -20
y se iguala con 4A $\quad 4a = -20$ $\quad a = \frac{-20}{4}$ $\quad a = -5$

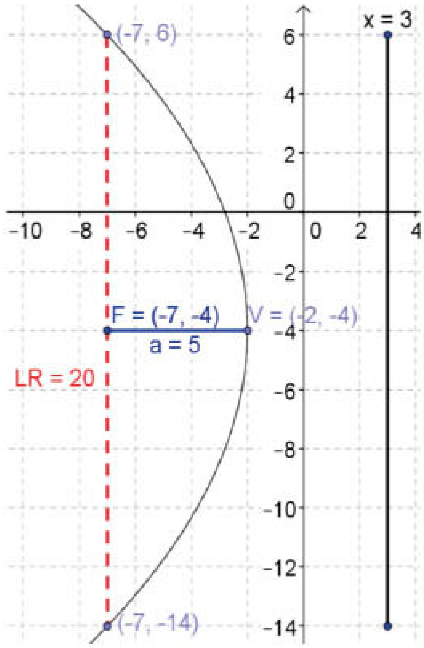
- Las coordenadas del foco. Están determinadas por la relación *(h + a, k)* (-2 – 5, -4) = (-7, -4)

- El lado recto. Están determinadas por la relación
  $LR = |4a|$ $LR = |4(-5)|$ $LR = 20$

- La directriz. Están determinadas por la relación
  $x = h - a$ $x = -2 - (-5)$ $x = 3$

- Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto
  $\frac{LR}{2} = \frac{20}{2} = 10$

  -4 + 10 = 6 -4 – 6 = -14 (-7, -14) y (-7, 6)



9. Encuentra la ecuación de la parábola en su formas ordinaria dada la ecuación $x^2 - 8x - 6y - 8 = 0$, además de todos sus elementos.

1. Se separan los términos de *x* a la izquierda y los términos de *y* a la derecha.
   $x^2 - 8x = 6y + 8$

2. Se completa el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo el término en *x* entre 2 y elevándolo al cuadrado, sumando éste término en ambos lados de la ecuación.
   $x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 6y + 8 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$ $x^2 - 8x + (4)^2 = 6y + 8 + (4)^2$
   $x^2 - 8x + 16 = 6y + 8 + 16$ $x^2 - 8x + 16 = 6y + 24$

3. Se factorizan ambos lados de la ecuación, de modo que del lado izquierdo quede un binomio al cuadrado y del lado derecho obtenemos el máximo común divisor de ambos términos, quedando la ecuación de la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$
   $(x - 4)^2 = 6(y + 4)$ Esta es la ecuación en su forma ordinaria.

- Las coordenadas del vértice. Como la ecuación está en la forma $(x - h)^2 = 4a(y - k)$
  $h = 4$, $k = -4$. Por lo tanto, las coordenadas del vértice son (h, k) (4, -4)

- El parámetro a.
  Extraemos el factor común de la parte derecha, que es 6 y se iguala con 4a

  $4a = 6$ $a = \frac{6}{4}$ $a = \frac{3}{2}$

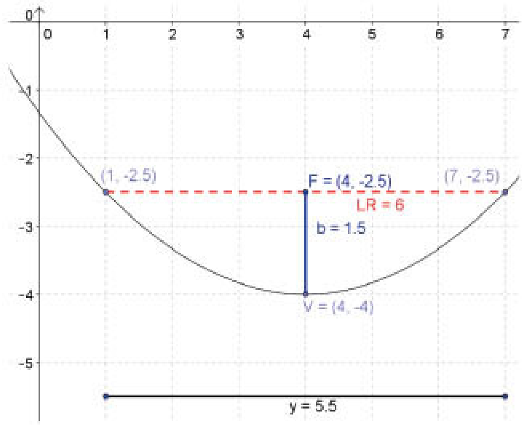
- Las coordenadas del foco. Están determinadas por la relación *(h, k + a)*
  $(4, -4 + \frac{3}{2}) = (4, -\frac{5}{2})$

- El lado recto. Están determinadas por la relación $LR = |4a|$ $LR = \left|4\left(\frac{3}{2}\right)\right| = |6|$ $LR = 6$

- La directriz. Están determinadas por la relación $y = k - a$ $y = -4 - \left(\frac{3}{2}\right)$ $y = -\frac{11}{2}$

- Las coordenadas de los puntos extremos del lado recto $\frac{LR}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $4 + 3 = 7$ $4 - 3 = 1$

  (1, -2,5) y (7, -2.5)



Actividad 3

1. El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor? Bosqueja la gráfica.

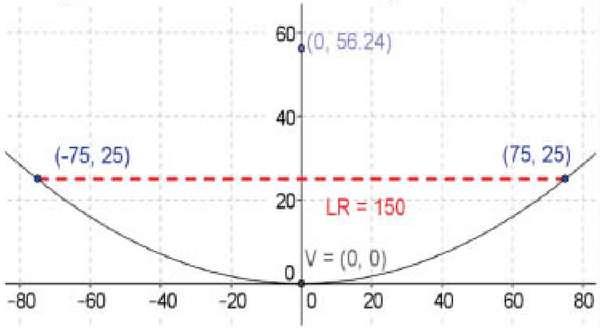
La parábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice en el origen y el eje de la parábola en el eje *y*.

La ecuación de la parábola tiene la forma $x^2 = 4ay$. Los valores son $x = 75$ (debido a que se parte el lado recto en 2), $y = 25$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

$(75)^2 = 4a(25)$ $5625 = 100a$

$a = \frac{5625}{100}$ $a = 56.25$



El receptor se tendrá que colocar 56.25 cm arriba del vértice del eje de la parábola.

$x^2 = 4(56.25)y$ $x^2 = 225y$

2. El vano del puente Baluarte Bicentenario es de 520 m y una altura de 169 m de sus torres. Si el punto más bajo está a 2 m del ras del piso, encuentra la altura de un cable que se encuentra a 100 m del centro. Bosqueja la gráfica.

La parábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice 2 m arriba del origen y el eje de la parábola en el eje *y*.

De acuerdo con la figura, la ecuación de la parábola tiene la forma $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, donde $h = 0$ y $k = 2$. Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

$(x - 0)^2 = 4a(y - 2)$ $\quad x^2 = 4a(y-2)$

Cuando x = 260 el valor de y = 169, y sustituyendo estos valores en la fórmula anterior:

$(260)^2 = 4a(169-2)$ $\quad 67600 = 4a(167)$ $\quad \dfrac{67600}{668} = 4a$ $\quad 4a = 101.2$

Al sustituir el valor de $4a$ en la ecuación $x^2 = 4a(y-2)$ queda:

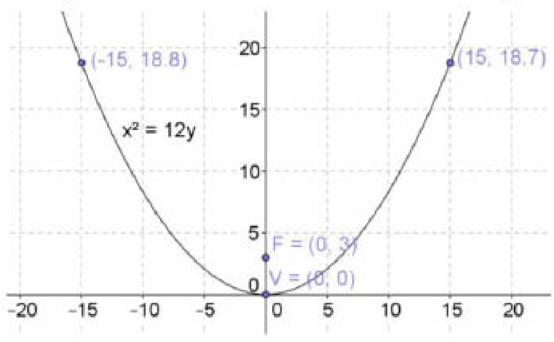
$x^2 = 101.2(y-2)$ y para saber la altura del cable a los 100 m del centro, hacemos $x = 100$

$(100)^2 = 101.2(y-2)$ $\quad \dfrac{10000}{101.2} = y-2$ $\quad 98.8 = y-2$ $\quad 98.8 + 2 = y$ $\quad y = 100.8$

La altura del cable a los 100 metros del centro es de 100.8 m

3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 cm del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco? Bosqueja la gráfica.

La parábola generatriz se traza en un plano cartesiano, donde se coloca el vértice en el origen y el eje de la parábola en el eje *y*.



La ecuación de la parábola tiene la forma $x^2 = 4ay$.

Los valores son $x = 15.5$ (debido a que se parte el lado recto en 2), $a = 3$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior tenemos:

$(15)^2 = 4(3)y$ $\quad 240.25 = 12y$

$y = \dfrac{225}{12}$ $\quad y = 18.75$

El faro deberá tener una profundidad de 18.75 cm para que el filamento quede en la posición del foco. $\quad x^2 = 4(3)y$ $\quad x^2 = 12y$

Bloque VII

Evaluación diagnóstica.

1. Cuando el plano que corta de manera oblicua cada generatriz de uno de los mantos de la superficie cónica.

2. $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad$ $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$ $\quad$ c = 10

3. $h^2 = co^2 + ca^2$ $\quad$ $co^2 = h^2 - ca^2$ $\quad$ $co = \sqrt{h^2 - ca^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$ $\quad$ $co = 3$

4. Se calcula el mcm de los denominadores multiplicando (36)(49) = 1764, y se multiplica cada término por el mcm.
 $\frac{1764x^2}{36} + \frac{1764y^2}{49} = 1764(1)$ Realizando las operaciones: opción d) $49x^2 + 36y^2 = 1764$

5. Por observación, los valores que puede tomar x son $-4.5 \leq x \leq 4.5$

6. Por observación, los valores que puede tomar y son $-5 \leq x \leq 5$

7. La longitud del segmento $\overline{VV'} = 9$

8. La longitud del segmento $\overline{BB'} = 10$

Dada la ecuación determina:

9. Dada la ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$, para la extensión de la variable x, se despeja y:

 $16y^2 = 144 - 9x^2$ $\quad$ $y = \sqrt{\frac{144 - 9x^2}{16}}$

 Como el valor de x está dentro de una raíz y esta no puede ser negativa, se iguala el numerador con 0, esto es, $144 - 9x^2 = 0$ $\quad$ $144 = 9x^2$ $\quad$ $x = \sqrt{\frac{144}{9}} = \pm\sqrt{16}$ $\quad$ $x = \pm 4$

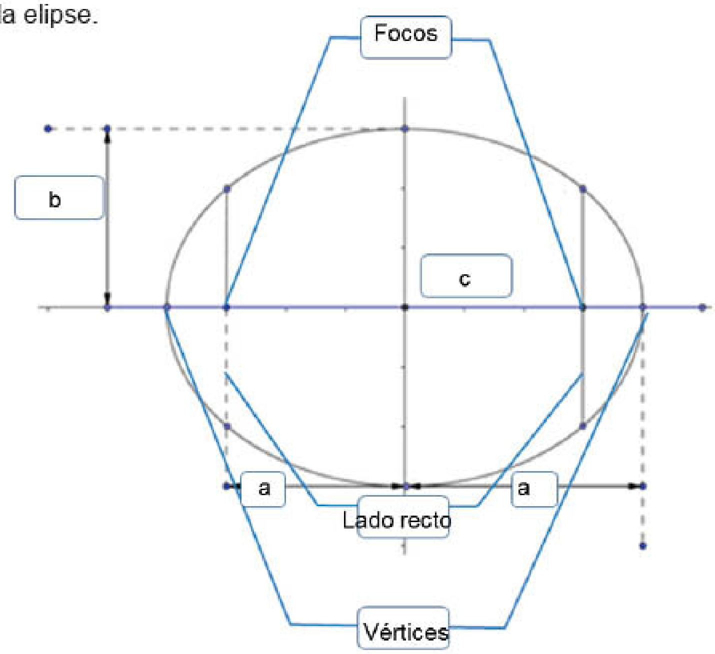
10. La extensión de la variable y, se despeja la variable x

 $9x^2 = 144 - 16y^2$ $\quad$ $x = \sqrt{\frac{144 - 16y^2}{9}}$

 Como el valor de y está dentro de una raíz y esta no puede ser negativa, se iguala el numerador con 0, esto es, $144 - 16y^2 = 0$ $\quad$ $144 = 16y^2$ $\quad$ $y = \sqrt{\frac{144}{16}} = \pm\sqrt{9}$ $\quad$ $y = \pm 3$

Actividad 1

1. Escribe dentro del recuadro el nombre o la variable que corresponde a cada elemento de la elipse.



2. Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en $V(0, 6)$ y $V'(0, -6)$ y sus focos en $F(0, 3)$ y F' $(0, -3)$.

Por los datos, concluimos que es una elipse con vértice en el origen y es vertical, ya que tanto los vértices como los focos tienen abscisa 0, lo que indica que su eje focal está sobre el eje x.

Por lo tanto, tiene la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, por lo que procedemos a calcular los valores de a y b.

Como las coordenadas de sus vértices son $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$, el valor de $a = 6$ y por las coordenadas del foco $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$, el valor de $c = 3$.

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ y despejamos b^2:
$b^2 = a^2 - c^2$ y sustituyendo los valores de a y c:
$b^2 = (6)^2 - (3)^2 = 36 - 9 = 27 \quad b = \pm\sqrt{27} \qquad b = \pm\ 5.2$

Sustituyendo los valores de a y b en la forma ordinaria de la ecuación de la elipse:
$\frac{x^2}{(5.2)^2} + \frac{y^2}{(6)^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ que es la ecuación de la elipse.

Calculamos las coordenadas del lado recto:

$L = \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(\frac{(5.2)^2}{6}, 3\right) \qquad L = \left(\frac{27}{6}, 3\right)$

$L' = \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(-\frac{(5.2)^2}{6}, 3\right) \qquad L' = \left(-\frac{27}{6}, 3\right)$

$R = \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(\frac{(5.2)^2}{6}, -3\right) \qquad R = \left(\frac{27}{6}, -3\right)$

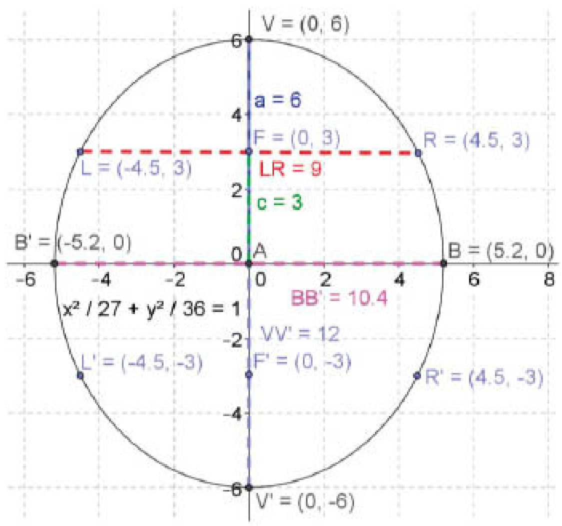
$R' = \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(-\frac{(5.2)^2}{6}, -3\right) \qquad R' = \left(-\frac{27}{6}, -3\right)$

Coordenadas del eje menor:
$B'(-b, 0) \quad B'(-5,2, 0) \quad$ y $\quad B(b, 0) \quad B(5.2, 0)$

La longitud del eje mayor:
$\overline{VV'} = 2a \qquad \overline{VV'} = 2(6) \qquad \overline{VV'} = 12$

La longitud del eje menor:
$\overline{BB'} = 2b \qquad \overline{BB'} = 2(5.2) \qquad \overline{BB'} = 10.4$

La longitud del lado recto LR:
$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5.2)^2}{6} \qquad LR = 9$



3. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Por los datos, concluimos que es una elipse con vértice en el origen y es vertical de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, así que procedemos a calcular los valores de a y b.

$b^2 = 9 \quad b = \sqrt{9} \quad b = 3$
$a^2 = 25 \quad a = \sqrt{25} \quad a = 5$

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ sustituyendo los valores de a y b:
$c^2 = (5)^2 - (3)^2 = 25 - 9 = 16 \quad c = \pm\sqrt{16} \quad c = 4$

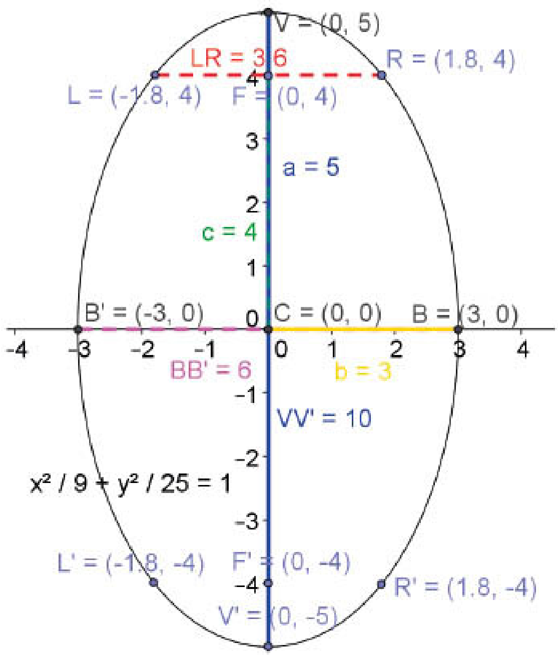
Calculamos las coordenadas del lado recto:

$L = \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \qquad L = \left(\frac{9}{5}, 4\right)$

$L' = \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(-\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \qquad L' = \left(-\frac{9}{5}, 4\right)$

$R = \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(\frac{(3)^2}{5}, -4\right) \qquad R = \left(\frac{9}{5}, -4\right)$

$R' = \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(-\frac{(3)^2}{5}, 4\right) \; R' = \left(-\frac{9}{5}, -4\right)$



Coordenadas de los focos:
$F'(0, -c) \quad F(0, -4) \quad$ y $\quad F(0, c) \quad F(0, 4)$

Coordenadas del eje mayor:
$V'(-a, 0) \quad V'(-5, 0) \quad$ y $\quad V(a, 0) \quad V(5, 0)$

Coordenadas del eje menor:
$B'(-b, 0) \quad B'(-3, 0) \quad$ y $\quad B(b, 0) \quad B(3, 0)$

La longitud del eje mayor
$\overline{VV'} = 2a \qquad \overline{VV'} = 2(5) \qquad \overline{VV'} = 10$

La longitud del eje menor
$\overline{BB'} = 2b \qquad \overline{BB'} = 2(3) \qquad \overline{BB'} = 6$

La longitud del lado recto LR:
$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{5} \qquad LR = 3.6$

4. Dada la ecuación de la elipse $16x^2 + 4y^2 = 16$ determina todos sus elementos.

Se dividen ambos miembros de la ecuación anterior entre 16 y da como resultado:

$\frac{16x^2 + 4y^2}{16} = \frac{16}{16}$ $\quad \frac{16x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = 1$ $\quad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

Por los datos, concluimos que es una elipse con vértice en el origen y es vertical de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, así que procedemos a calcular los valores de a y b.

$b^2 = 1 \quad b = \sqrt{1} \quad b = 1$

$a^2 = 4 \quad a = \sqrt{4} \quad a = 2$

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ sustituyendo los valores de a y b:

$c^2 = (2)^2 - (1)^2 = 4 - 1 = 3 \quad c = \pm\sqrt{3} \quad c = 1.7$

Calculamos las coordenadas del lado recto:

$L = \left(\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(\frac{(1)^2}{2}, 1.7\right) \qquad L = (0.5, 1.7)$

$L' = \left(-\frac{b^2}{a}, c\right) = \left(-\frac{(1)^2}{4}, 3.9\right) \qquad L' = (-0.5, 1.7)$

$R = \left(\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(\frac{(1)^2}{4}, -3.9\right) \qquad R = (0.5, -1.7)$

$R' = \left(-\frac{b^2}{a}, -c\right) = \left(-\frac{(1)^2}{4}, -3.9\right) \qquad R' = (-0.5, -1.7)$

Coordenadas de los focos:

$F'(0, -c) \quad F(0, -1.7) \quad$ y $\quad F(0, c) \quad F(0, 1.7)$

Coordenadas del eje mayor:

$V'(-a, 0) \quad V'(-2, 0) \quad$ y $\quad V(a, 0) \quad V(2, 0)$

Coordenadas del eje menor:

$B'(-b, 0) \quad B'(-1, 0) \quad$ y $\quad B(b, 0) \quad B(1, 0)$

La longitud del eje mayor

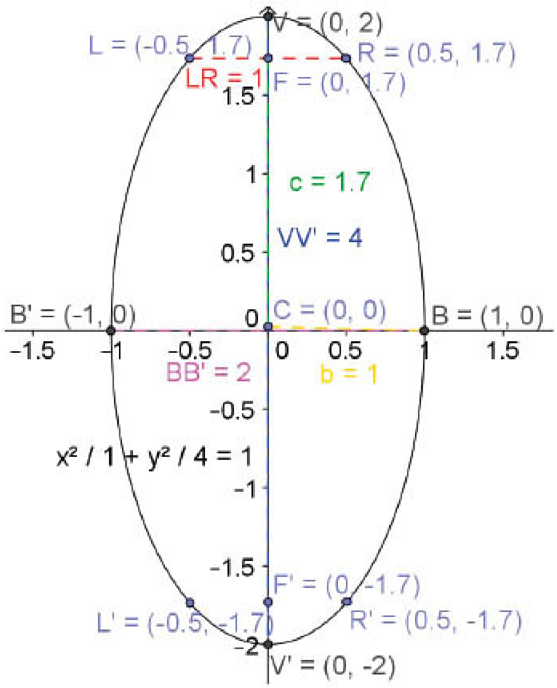
$\overline{VV'} = 2a \qquad \overline{VV'} = 2(2) \qquad \overline{VV'} = 4$

La longitud del eje menor

$\overline{BB'} = 2b \qquad \overline{BB'} = 2(1) \qquad \overline{BB'} = 2$

La longitud del lado recto LR:

$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(1)^2}{2} \qquad LR = 1$



5. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

Por los datos, concluimos que es una elipse con vértice en el origen y es horizontal de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, por lo que procedemos a calcular los valores de *a* y *b*.

$a^2 = 36 \quad a = \sqrt{36} \quad a = 6$
$b^2 = 9 \quad b = \sqrt{9} \quad b = 3$

Utilizamos la relación $c^2 = a^2 - b^2$ sustituyendo los valores de a y b:
$c^2 = (6)^2 - (3)^2 = 36 - 9 = 27 \quad c = \pm\sqrt{27} \quad c = 5.2$

Calculamos las coordenadas del lado recto:
$L = \left(c, \frac{b^2}{a}\right) = \left(5{,}2, \frac{(3)^2}{6}\right) \qquad L = (5.2, 1.5)$
$L' = \left(-c, \frac{b^2}{a}\right) = \left(-5{,}2, \frac{(3)^2}{6}\right) \qquad L' = (-5.2, 1.5)$
$R = \left(c, -\frac{b^2}{a}\right) = \left(5{,}2, -\frac{(3)^2}{6}\right) \qquad R = (5.2, -1.5)$
$R' = \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right) = \left(-5{,}2, -\frac{(3)^2}{6}\right) \qquad R' = (-5.2, -1.5)$

Coordenadas de los focos
$F'(-c, 0) \quad F(-5.2, 0)$ y $F(c, 0) \quad F(5.2, 0)$

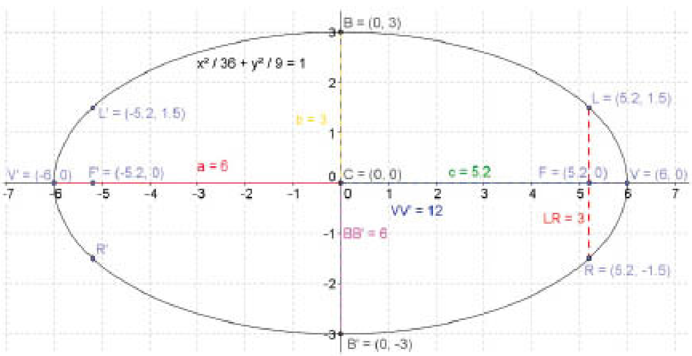
Coordenadas del eje mayor:
$V'(-a, 0) \quad V'(-6, 0)$ y $V(a, 0) \quad V(6, 0)$

Coordenadas del eje menor:
$B'(0, -b) \quad B'(0, -3)$ y $B(0, b) \quad B(0, 3)$

La longitud del eje mayor
$\overline{VV'} = 2a \qquad \overline{VV'} = 2(6) \qquad \overline{VV'} = 12$

La longitud del eje menor
$\overline{BB'} = 2b \qquad \overline{BB'} = 2(3) \qquad \overline{BB'} = 6$

La longitud del lado recto *LR*
$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{6} \qquad LR = 3$



Actividad 2

1. Escribe la ecuación de la elipse con vértice fuera del origen en sus formas:

Ordinaria	General
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

2. Respuesta libre.

3. Explica cómo obtienes los elementos de una elipse a partir de su forma general:

Elemento	Están determinadas por las fórmulas:
Coordenadas de los vértices del eje mayor	$V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$
Coordenadas de los vértices del eje menor	$B(h + b, k)$ y $B'(h - b, k)$
Coordenadas de los focos	$F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$
Lado recto	$LR = \frac{2b^2}{a}$
Longitud del eje mayor $\overline{\mathbf{VV'}}$	$\overline{VV'} = 2a$
Longitud del lado menor $\overline{\mathbf{BB'}}$	$\overline{BB'} = 2b$

4. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, dados C(4, 2), eje mayor = 14, eje menor = 10 y eje focal paralelo al eje y.

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una ecuación de la forma

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ donde $h = 4$ y $k = 2$

Dada la longitud del lado mayor $2a = 14$ despejamos a: $a = \frac{14}{2}$ $a = 7$

Dada la longitud del lado menor $2b = 10$ despejamos b: $b = \frac{10}{2}$ $b = 5$

Como $c^2 = a^2 - b^2$ $c^2 = (7)^2 - (5)^2 = 49 - 25$ $c^2 = 24$ $c = \sqrt{24}$ $c = 4.9$

Al sustituir estos valores en la ecuación en forma ordinaria:

$\frac{(x-4)^2}{(7)^2} + \frac{(y-2)^2}{(5)^2} = 1$ $\frac{(x-4)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

Desarrollamos para la ecuación en forma general:
Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (49 x 25 = 1225):

$\frac{1225(x-4)^2}{49} + \frac{1225(y-2)^2}{25} = 1(1225)$

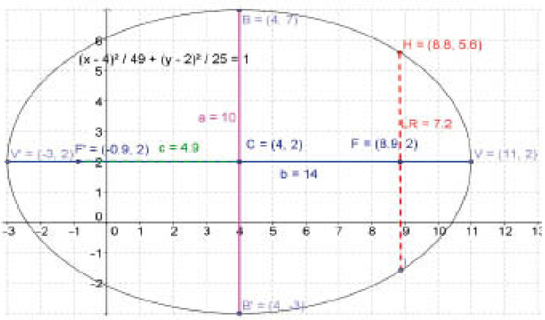
Y dividiendo entre los denominadores:
$25(x-4)^2 + 49(y-2)^2 = 1225$

Desarrollamos los binomios y multiplicamos:
$25(x^2 - 8x + 16) + 49(y^2 - 4y + 4) = 1225$
$25x^2 - 200x + 400 + 49y^2 - 196y + 196 - 1225 = 0$
$25x^2 + 49y^2 - 200x - 196y - 629 = 0$

Las coordenadas de los vértices del eje mayor:
$V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k)$ $V(4 + 7, 2)$ y $V'(4 - 7, 2)$ $V(11, 2)$ y $V'(-3, 2)$

Las coordenadas de los vértices del eje menor:
$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$ $B(4, 2 + 5)$ y $B'(4, 2 - 5)$ $B(4, 7)$ y $B'(4, -3)$

Las coordenadas de los focos:
$F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$ $F(4 + 4.9, -2)$ y $F'(4 - 4.9, -2)$
F(8.9, 2) y F'(-0.9, 2)



La longitud del lado recto LR:

$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)^2}{7} = \frac{50}{7}$ $LR = 7.1$

La longitud del eje mayor:
$\overline{VV'} = 2a = 2(7)$ $\overline{VV'} = 14$

La longitud del lado menor:
$\overline{BB'} = 2b = 2(5)$ $\overline{BB'} = 10$

5. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, además de todos sus elementos, dados V(8, 1), V'(2, 1), F(3, 1) y F'(7, 1).

Según las condiciones geométricas dadas, tenemos una ecuación de la forma

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Como la longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a$ y la diferencia entre las abscisas de sus vértices es $8 - 2 = 6$, igualamos $2a = 6$ y despejamos a: $a = = \frac{6}{2}$ $a = 3$

Como la longitud del eje focal $\overline{CC'} = 2c$ y la diferencia entre las ordenadas de sus focos es $7 - 3 = 4$, igualamos $2c = 4$ y despejamos c: $c = = \frac{4}{2}$ $c = 2$

Como $c^2 = a^2 - b^2$ $b^2 = a^2 - c^2$ $b^2 = (3)^2 - (2)^2 = 9 - 4 = 5$ $b = \sqrt{5}$ $b = 2.24$

El centro es el punto medio de los vértices, por lo que para calcular sus coordenadas:

$Pm = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{8+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}, \frac{2}{2}\right) = (5, 1)$

Coordenadas del centro C(h, k) C(5, 1)

Al sustituir estos valores en la ecuación en forma ordinaria:

$\frac{(x-5)^2}{(3)^2} + \frac{(y-1)^2}{(2.24)^2} = 1$ $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$

Desarrollamos para la ecuación en forma general:

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (9 x 5 = 45):

$\frac{45(x-5)^2}{9} + \frac{45(y-1)^2}{5} = 1(45)$

Y dividiendo entre los denominadores:

$5(x-5)^2 + 9(y-1)^2 = 45$

Desarrollando los binomios y multiplicando:

$5(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 - 2y + 1) = 45$

$5x^2 - 50x + 125 + 9y^2 - 18y + 9 - 45 = 0$

$5x^2 + 9y^2 - 50x - 18y + 89 = 0$

Las coordenadas de los vértices del eje menor:

$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$ $B(5, 1 + 2.24)$ y $B'(5, 1 - 2.24)$ $B(5, 3.24)$ y $B'(5, -1.24)$

La longitud del lado recto LR:

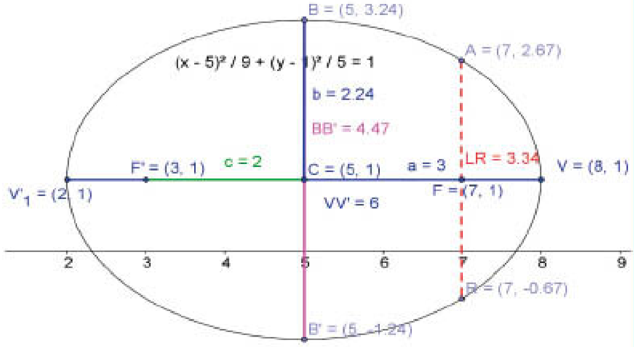
$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2.24)^2}{3} = \frac{10}{3}$ $LR = 3.3$

La longitud del eje mayor:

$\overline{VV'} = 2a = 2(3)$ $\overline{VV'} = 6$

La longitud del lado menor:

$\overline{BB'} = 2b = 2(2.24)$ $\overline{BB'} = 4.48$



6. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, transformarla a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

1. Se separan los términos de *x* en un paréntesis y los términos de *y* en otro paréntesis, $(4x^2 - 16x) + (9y^2 + 18y) = 11$

2. Se factorizan ambos paréntesis con el máximo común divisor (mcd) de cada uno. $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) = 11$

3. Se completa el trinomio cuadrado perfecto de cada paréntesis, dividiendo el segundo término de cada paréntesis entre 2 y elevando el resultado al cuadrado, agregando del lado derecho los números que se sumaron para mantener el equilibrio entre las ecuaciones.

$$4\left(x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + 9\left(y^2 + 2y + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = 11 + 4\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$4(x^2 - 4x + (2)^2) + 9(y^2 + 2y + (1)^2) = 11 + 4(2)^2 + 9(1)^2$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) = 11 + 16 + 9$$

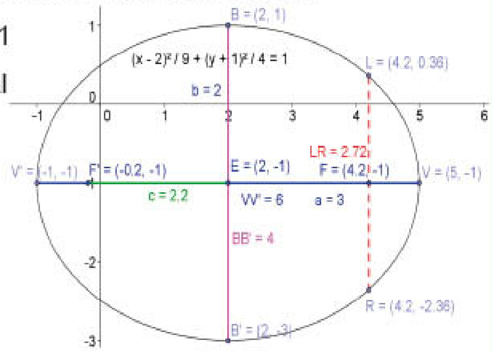
4. Se factorizan ambos paréntesis de modo que cada uno quede como un binomio al cuadrado, y del lado derecho se reducen términos quedando la ecuación de la forma $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ $\quad 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36$

5. Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término de la derecha (a^2b^2), separando el lado izquierdo en dos fracciones.

$$\frac{4(x-2)^2 + 9(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36} \qquad \frac{4(x-2)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1$$

6. Se simplifican las fracciones del lado izquierdo para llegar a la forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$



Como a > b, la elipse tiene su foco en el eje horizontal

Las coordenadas del centro:

$C(h, k) \quad h = 2 \quad k = -1 \qquad C(2, -1)$

Como $a^2 = 9 \quad a = \pm\sqrt{9} \qquad a = \pm 3$

Como $b^2 = 4 \quad b = \pm\sqrt{4} \qquad b = \pm 2$

$c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = 9 - 4 = 5 \quad c = \pm\sqrt{5} \quad c = \pm 2.2$

Las coordenadas de los vértices del eje mayor:

$V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k) \qquad V(2 + 3, -1)$ y $V'(2 - 3, -1) \qquad V(5, -1)$ y $V'(-1, -1)$

Las coordenadas de los vértices del eje menor:

$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b) \qquad B(2, -1 + 2)$ y $B'(2, -1 - 2) \qquad B(2, 1)$ y $B'(2, -3)$

Las coordenadas de los focos:

$F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k) \qquad F(2 + 2.2, -1)$ y $B'(2 - 2.2, -1) \qquad F(4.2, -1)$ y $F'(-0.2, -1)$

La longitud del lado recto LR $\quad LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(2)^2}{3} = \dfrac{2(4)}{3} = \dfrac{8}{3} \quad LR = 2.7$

La longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a = 2(3) \quad \overline{VV'} = 6$

La longitud del lado menor $\overline{BB'} = 2b = 2(2) \quad \overline{BB'} = 4$

7. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general, cuyo centro es $C(3, -4)$ con eje focal paralelo al eje x, longitud del eje mayor 10 y excentricidad $\frac{4}{5}$, determina todos sus elementos.

Como el eje mayor es $2a = 10$, $a = 5$

La excentricidad $e = \frac{4}{5} = \frac{c}{a}$ $\quad a(\frac{4}{5}) = c \quad 5(\frac{4}{5}) = c \quad c = 4$

$b^2 = a^2 - c^2 = (5)^2 - (4)^2 = 25 - 16 = 9 \qquad b = \sqrt{9} \qquad b = 3$

Con las coordenadas del centro $C(3, -4)$ tenemos $h = 3$ $k = -4$

Al sustituir estos valores en la ecuación en forma ordinaria:

$$\frac{(x-3)^2}{(5)^2} + \frac{(y-(-4))^2}{(3)^2} = 1 \qquad \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

Desarrollamos para la ecuación en forma general:

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (25 x 5 = 225):

$$\frac{225(x-3)^2}{25} + \frac{225(y+4)^2}{9} = 1(225)$$

Y dividiendo entre los denominadores:

$9(x-3)^2 + 25(y+4)^2 = 225$

Desarrollando los binomios y multiplicando:

$9(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 8y + 16) = 45$

$9x^2 - 54x + 81 + 25y^2 + 200y + 400 - 225 = 0$

$9x^2 + 25y^2 - 54x + 200y + 256 = 0$

Las coordenadas de los vértices del eje mayor:

$V(h + a, k)$ y $V'(h - a, k) \qquad V(3 + 5, -4)$ y $V'(3 - 5, -4)$

$V(8, -4)$ y $V'(-2, -4)$

Las coordenadas de los vértices del eje menor:

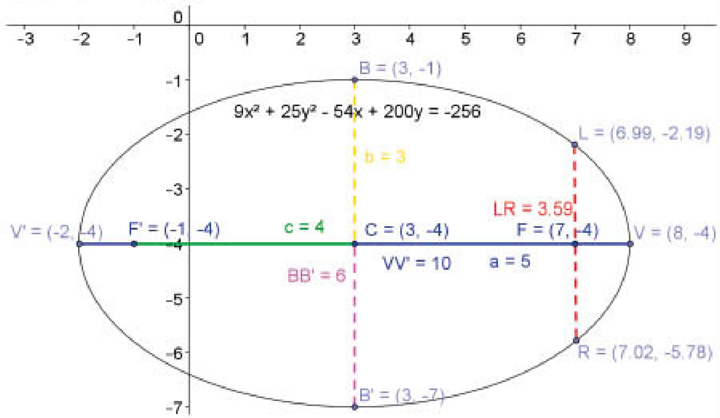
$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b) \qquad B(3, -4 + 3)$ y $B'(3, -4 - 3)$

$B(3, -1)$ y $B'(3, -7)$

Las coordenadas de los focos:

$F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k) \qquad F(3 + 4, -4)$ y $B'(3 - 4, -4)$

$F(7, -4)$ y $F'(-1, -4)$



La longitud del lado recto LR

$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{5} = \frac{18}{3} \qquad LR = 3.6$

La longitud del eje mayor

$\overline{VV'} = 2a = 2(5) \qquad \overline{VV'} = 10$

La longitud del lado menor

$\overline{BB'} = 2b = 2(3) \qquad \overline{BB'} = 6$

8. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general cuyo centro está en $C(-2,1)$, con eje focal paralelo al eje y, longitud del lado menor 16, longitud del lado recto = $\frac{32}{3}$, además de todos sus elementos.

Lado menor $2b = 16 \quad b = \frac{16}{2} \quad b = 8$

Como LR = $\frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3} \qquad \frac{2(8)^2}{a} = \frac{128}{a} = \frac{32}{3} \qquad 32a = 3(128) \quad a = \frac{384}{32} \qquad a = 12$

$c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = (12)^2 - (8)^2 = 144 - 64 \quad c = \pm\sqrt{80} \quad c = 8.9$

Del centro $C(-2, 1)$ obtenemos: $h = -2 \quad k = 1$

Sustituimos estos valores en la forma ordinaria de la elipse con eje focal paralelo al eje y:

$$\frac{(x-(-2))^2}{(8)^2} + \frac{(y-1)^2}{(12)^2} = 1 \quad \frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{144} = 1$$

Desarrollamos para la ecuación en forma general:

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (64 x 144 = 9216):

$$\frac{9216(x+2)^2}{64} + \frac{9216(y-1)^2}{144} = 1(9216)$$

Y dividiendo entre los denominadores:

$144(x+2)^2 + 64(y-1)^2 = 9216$

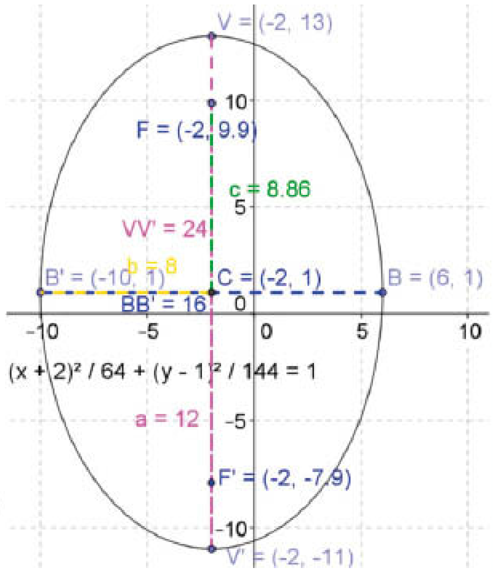
Desarrollando los binomios y multiplicando:

$144(x^2 + 4x + 4) + 64(y^2 - 2y + 1) = 9216$

$144x^2 + 576x + 576 + 64y^2 - 128y + 64 - 9216 = 0$

Reduciendo términos y acomodando:

$144x^2 + 64y^2 + 576x - 128y - 8576 = 0$



Coordenadas de los vértices del eje mayor :

$V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$

$V(-2, 1 + 12) \quad V(-2, 13) \qquad V'(-2, 1 - 12) \quad V'(-2, -11)$

Coordenadas de los vértices del eje menor:

$B(h + b, k)$ y $B'(h - b, k)$

$B(-2 + 8, 1) \quad B(6, 1) \qquad B'(-2 - 8, 1) \quad B'(-10, 1)$

Coordenadas de los focos $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$

$F(-2, 1 + 8.9) \quad F(-2, 9.9) \qquad F'(-2, 1 - 8.9) \quad F'(-2, -7.9)$

La longitud del eje mayor:

$\overline{VV'} = 2a = 2(12) \quad \overline{VV'} = 24$

h) La longitud del lado menor:

$\overline{BB'} = 2b = 2(8) \quad \overline{BB'} = 16$

9. Encuentra la ecuación de la elipse en sus formas ordinaria y general dados los vértices V(6,4) y V'(-2, 4) y focos F(5, 4) y F'(-1, 4), además de todos sus elementos.

El centro es el punto medio de los vértices:

$C\left(\frac{6-2}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$ $C(2, 4)$ $h = 2$ $k = 4$

Como la longitud del eje mayor $\overline{VV'} = 2a$ y la diferencia entre las abscisas de sus vértices es $6 - (-2) = 8$, igualamos $2a = 8$ y despejamos a: $a = = \frac{8}{2}$ $a = 4$

Como la longitud del eje focal $\overline{CC'} = 2c$ y la diferencia entre las ordenadas de sus focos es 5 $- (-1) = 6$, igualamos $2c = 6$ y despejamos c: $c = = \frac{6}{2}$ $c = 3$

Como $c^2 = a^2 - b^2$ $b^2 = a^2 - c^2$ $b^2 = (4)^2 - (3)^2 = 16 - 9 = 7$ $b = \sqrt{7}$ $b = 2.65$

Como $a > b$, la elipse tiene su eje focal paralelo al eje x.

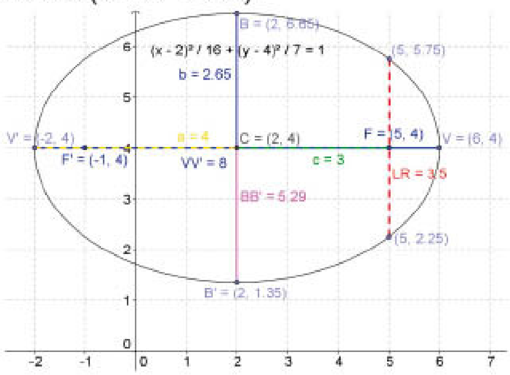
Al sustituir estos valores en la ecuación en forma ordinaria:

$\frac{(x-2)^2}{(4)^2} + \frac{(y-4)^2}{(2.65)^2} = 1$ $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$

Desarrollamos para la ecuación en forma general:

Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm (16 x 7 = 112):

$\frac{112(x-2)^2}{16} + \frac{7(y-4)^2}{7} = 1(112)$



Y dividiendo entre los denominadores:

$7(x-2)^2 + 16(y-4)^2 = 112$

Desarrollando los binomios y multiplicando:

$7(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 - 8y + 16) = 112$

$7x^2 - 28x + 28 + 16y^2 - 128y + 256 - 112 = 0$

$7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$

Las coordenadas de los vértices del eje menor:

$B(h, k + b)$ y $B'(h, k - b)$ $B(2, 4 + 2.65)$ y $B'(2, 4 - 2.65)$

$B(2, 6.65)$ y $B'(2, 1.35)$

La longitud del lado recto LR:

$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2.65)^2}{4} = \frac{18}{4}$ $LR = 3.5$

g) La longitud del eje mayor:

$\overline{VV'} = 2a = 2(4)$ $\overline{VV'} = 8$

h) La longitud del lado menor:

$\overline{BB'} = 2b = 2(2.65)$ $\overline{BB'} = 5.3$

10. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $9x^2 + 5y^2 - 18x - 40y + 44 = 0$ transformarla a su forma ordinaria y calcula todos sus elementos.

- Se separan los términos de x en un paréntesis y los términos de y en otro paréntesis,
$(9x^2 - 18x) + (5y^2 - 40y) = -44$

- Se factorizan ambos paréntesis con el máximo común divisor (mcd) de cada uno.
$9(x^2 - 2x) + 5(y^2 - 8y) = -44$

- Se completa el trinomio cuadrado perfecto de cada paréntesis, dividiendo el segundo término de cada paréntesis entre 2 y elevando el resultado al cuadrado, agregando del lado derecho los números que se sumaron para mantener el equilibrio entre las ecuaciones.

$$9\left(x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) + 5\left(y^2 - 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right) = -44 + 9\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$9(x^2 - 2x + 1) + 5(y^2 - 8y + 16) = -44 + 9(1) + 5(16)$$
$$9(x^2 - 2x + 1) + 5(y^2 - 8y + 16) = -44 + 9 + 80$$

- Se factorizan ambos paréntesis de modo que cada uno quede como un binomio al cuadrado, y del lado derecho se reducen términos con lo cual queda la ecuación de la forma
$b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2 \qquad 9(x - 1)^2 + 5(y - 4)^2 = 45$

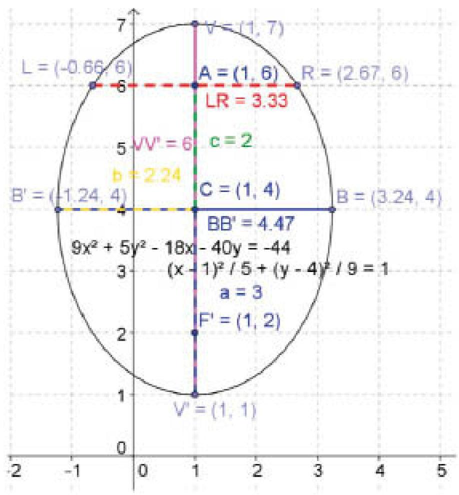
- Se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término de la derecha (a^2b^2), separando el lado izquierdo en 2 fracciones.

$$\frac{9(x-1)^2 + 5(y-4)^2}{45} = \frac{45}{45} \qquad \frac{9(x-1)^2}{45} + \frac{5(y-4)^2}{45} = 1$$

- Se simplifican las fracciones del lado izquierdo para llegar a la forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

Como $a < b$, la elipse tiene su foco en el eje vertical:



Las coordenadas del centro:
$C(h, k) \quad h = 1 \quad k = 4 \qquad C(1, 4)$

Como $b^2 = 5 \quad b = \pm\sqrt{5} \qquad b = \pm 2.24$
Como $a^2 = 9 \quad a = \pm\sqrt{9} \qquad a = \pm 3$
$c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = 9 - 5 = 4 \quad c = \pm\sqrt{4} \quad c = \pm 2$

Coordenadas de los vértices del eje mayor :
$V(h, k + a)$ y $V'(h, k - a)$
$V(1, 4 + 3) \quad V(1, 7) \qquad V'(1, 4 - 3) \quad V'(1, 1)$

Coordenadas de los vértices del eje menor:
$B(h + b, k)$ y $B'(h - b, k)$
$B(1 + 2.24, 4) \quad B(3.24, 4) \qquad B'(1 - 2.24, 4) \quad B'(-1.24, 4)$

Coordenadas de los focos $F(h, k + c)$ y $F'(h, k - c)$
$F(1, 4 + 2) \quad F(1, 6) \qquad F'(1, 4 - 2) \quad F'(1, 2)$

La longitud del eje mayor:
$\overline{VV'} = 2a = 2(3) \qquad \overline{VV'} = 6$

h) La longitud del lado menor:
$\overline{BB'} = 2b = 2(2.24) \qquad \overline{BB'} = 4.48$

Actividad 3

1. El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base del arco mide 8 m de un lado y la parte más alta del arco mide 3 m arriba de la horizontal. Encuentra la altura a los 3 m de la base. Bosqueja la gráfica.

Como la longitud del eje mayor es 8m y es igual a 2*a*, tenemos 2*a* = 8 y despejamos *a*:

$a = \frac{8}{2}$ $\quad a = 4$

La altura del puente es 3 m, que corresponde al valor de ***b***. $\quad b = 3$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la elipse con vértice en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Como se quiere calcular la altura a los 3 metros de la base, hacemos $x = 3$, valor que se sustituye en la ecuación anterior:

$$\frac{(3)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Se despeja la variable *y*:

$$\frac{9}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{9}{16}$$

Se pasa multiplicando el 9 al lado derecho:

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{9}{16}\right) \qquad y^2 = 9 - \frac{81}{16} \qquad y^2 = \frac{63}{16} \qquad y = \sqrt{\frac{63}{16}} \qquad y = 1.98 \text{ m}$$

A los 3 metros de la base el puente tendrá una altura de 1.98 m

2. A un herrero le mandan hacer las protecciones para una ventana con forma semielíptica, cuya longitud en la base es de 1.5 m y altura de 80 cm, y le piden que coloque protecciones cada 25 cm. Determina la altura de cada barra de protección para la ventana.

Como la longitud del eje mayor es 1.5 m = 150 cm y es igual a 2*a*, tenemos 2*a* = 150 y despejamos *a*:

$a = \frac{150}{2}$ $\quad a = 75$

La altura de la ventana es 80 cm, que corresponde al valor de *b*. $\quad b = 80$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la elipse con vértice en el origen:

$$\frac{x^2}{(80)^2} + \frac{y^2}{(75)^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{6400} + \frac{y^2}{5625} = 1$$

Como se quiere calcular la altura de los barrotes cada 25 cm, hacemos $x = 25$, valor que se sustituye en la ecuación anterior:

$$\frac{(25)^2}{6400} + \frac{y^2}{5625} = 1$$

Se despeja la variable *y*:

$\frac{625}{6400} + \frac{y^2}{5625} = 1 \quad \frac{y^2}{5625} = 1 - \frac{6250}{6400}$

Se pasa multiplicando el 5625 al lado derecho:

$y^2 = 5625\left(1 - \frac{625}{6400}\right) \quad y^2 = 5625(.9) \quad y^2 = 5625 - 5493.16 \quad y = \sqrt{5075.68} \quad y = 71.48$ cm

A los 25 cm a la izquierda y a la derecha del centro (50 y 100 cm), los barrotes tendrán una altura de 71.48 cm

Como se quiere calcular la altura a los 50 cm del centro de la base, hacemos x = 50, valor que se sustituye en la ecuación anterior:

$\frac{(50)^2}{6400} + \frac{y^2}{5625} = 1$

Se despeja la variable *y*:

$\frac{2500}{6400} + \frac{y^2}{5625} = 1$

$\frac{y^2}{6400} = 1 - \frac{2500}{6400}$

Se pasa multiplicando el 6400 al lado derecho:

$y^2 = 6400\left(1 - \frac{2500}{6400}\right) \qquad y^2 = 6400(0.61) \qquad y^2 = 3904 \qquad y = \sqrt{3904} \qquad y = 62.48$ cm

A los 50 cm del centro de la base (25 y 125 cm), los barrotes tendrán una altura de 62.48 cm.

Referencias

Cuéllar, J. A. (2012). *Matemáticas III.* 3a. Ed. México: Mc Graw Hill. México

Hernández, A. (2012). *Geometría Analítica*. México: Ediciones Mabra.

Aguilar, A. (2009). *Matemáticas Simplificadas*. 2a. Ed. México: Prentice Hall.

Material fotográfico e iconografía
Depositphotos
Google images (recursos genéricos de libre distribución para propósitos académicos y sin fines de lucro).

INSERTAR DATOS DE COLOFÓN

PÁGINA 352

Secretaría de Educación Pública
Subsecretaría de Educación Media Superior
Dirección General del Bachillerato

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEBACHILLERATO
COMUNITARIO